Математика пәні бойынша Республикалық оқушылар олимпиадасының үшінші (облыстық) кезеңі (2022-2023 оқу жылы)

9-сынып

2 тур

Жұмыс уақыты: 3 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

4. $PL||BC$, $PM||CA$, $PK||AB$ болатындай ABC үшбұрышының BC, CA, AB қабырғаларынан сәйкесінше K, L, M нүктелері таңдалды, ал үшбұрыштың ішінен P нүктесі таңдалды. $AMPL$, $BKPM$, $CLPK$ - үш трапециясы да шеңберге сырттай сызылуы мүмкін бе?

5. $2 \leqslant \frac{x}{x_i} \leqslant 18 (x = a,b,c)$. орындалатындай оң a,b,c,a_1,b_1,c_1 үшін теңсіздікті дәлелдеңіз.

$$(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2) \leqslant \frac{25}{9}(a\cdot a_1+b\cdot b_1+c\cdot c_1)^2$$

6.

$$[a,b,c] = \frac{ab+bc+ca}{5}.$$

болатындай барлық натурал a, b, c табыңыз.

Бұл жердегі $[x,y]-$ x және y сандарының ең кіші ортақ еселігі.

Третий (областной) этап Республиканской олимпиады школьников по математике (2022-2023 учебный год)

9 класс

2 тур

Время работы: 3 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

4. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC выбраны соответственно точки K, L, M, а внутри треугольника выбрана точка P так, что $PL||BC$, $PM||CA$, $PK||AB$. Может ли оказаться, что все три трапеции $AMPL$, $BKPM$, $CLPK$ – описанные?

5. Для положительных a,b,c,a_1,b_1,c_1 таких $2 \leqslant \frac{x}{x_i} \leqslant 18 (x = a,b,c)$. Докажите, что

$$(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2) \leqslant \frac{25}{9}(a\cdot a_1+b\cdot b_1+c\cdot c_1)^2$$

6. Найти все натуральные a,b,c такие, что

$$[a,b,c] = \frac{ab+bc+ca}{5}.$$

Здесь $[x,y]-$ наименьшее общее кратное чисел x и y.

Решения и критерии оценивания второго (районного) этапа Республиканской олимпиады школьников по математике

2022-2023 учебный год

9 класс

Общие положения по проверке работ

1. Приведённые критерии оценивания являются приблизительными. Учащиеся (как и проверяющие), возможно, смогут найти и другие верные решения. Жюри имеет право вносить изменения в критерии, проголосовав за них коллегиально. Главное, чтобы все работы участников оценивались по одинаковым критериям.

2. Перед проверкой жюри следует внимательно изучить олимпиадные задания, их решения и критерии. Желательно прорешать задания самим для возможного поиска альтернативных решений.

3. По окончании проверки обязательно надо проводить разбор и апелляцию задач, притом разборы желательно делать до апелляции и при разборе рассказывать ученикам, за что снимались баллы, а за что добавлялись. Это значительно сократить число учеников желающих подать на апелляцию.

4. В целях более справедливой оценки желательно чтобы одну задачу проверял один человек (или, согласованно, одна группа). В конце, если позволяет время, то следует перепроверить горизонтально (один человек проверяет все задачи одного школьника).

5. Следует помнить, что олимпиадная работа – это не контрольная работа. При оценивании олимпиадных работ, в отличие от оценивания типовых заданий по математике, недопустимо снимать баллы за исправления в работе, за слишком длинное решение, или если решение школьника отличается от решения, приведенного в учебных пособиях.

6. Не следует слишком строго наказывать за технические ошибки или недостатки в решении: описки, легко устранимые арифметические ошибки, непринципиальные моменты в ходе решения, напримеручастник до конца не упростил ответ, не совсем строгий порядок изложение или пропуск очевидных моментов, не влияющих в целом на ход решения. В зависимости от серьёзности ошибки или недостатка снимается не более 2 баллов, в некоторых ситуациях вообще снимать не следует.

7. Внимательно проверяйте насколько соответствует решение критериям проверки. В особенности, если решение ученика неполное и / или альтернативное официальному. Важно понять, насколько участник продвинулся по критериям, какие случае идеи он предлагает и какие факты им получены или доказаны. В альтернативного решения желательно обсудить решения и критерии для этого решения коллегиально.

8. Однако текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен оцениваться в 0 баллов. Баллы за «старание участника» не выставляются, даже если участник исписал много страниц или построил «красивый» чертёж. Если участник «угадал» правильный ответ, не приводит никаких объяснений, как он его получил, то за это не следует давать баллов.

9. Часто на олимпиадах можно встретить так называемые «счётные решения», когда участник пытается решить задачу «в лоб», опираясь только на алгебраические операции, метод координат, векторный метод, теоремы косинусов, синусов, Чевы, Менелая и т. п., не применяя никакую идею, отличного от технического счёта. Обычно такие решения (если вообще возможно решить таким способом задачу) занимают много страниц текста. К таким «счётным» решениям по сложившейся многолетней традицииприменяется следующая схема оценивания:

   - если участник смог довести своё счётное решение до конца, то он получает полные **7 баллов**;
   - если участник не довёл своё «счётное» решение до конца (независимо насколько он продвинулся) и / или допустил вычислительную ошибку — **0 баллов**.

10. На математических олимпиадах преимущественно закрепилась наилучшим образом зарекомендовавшая себя 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице ниже. Таблица примерная, к каждой задаче следует подходить индивидуально.

Примерные критерии оценивания задач

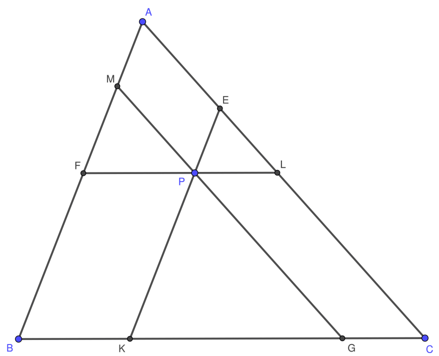
Баллы	**Отметка**	**Правильность (ошибочность) решения**
7	$+$	Полное верное решение.
6-7	$\underset{\cdot}{+}$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	$\underset{\bullet}{+}$ или $\underset{-}{+}$	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	$\pm$	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	$\dot{-}$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	$-$	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	$-$	Решение отсутствует.

Задача 9.4

На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC выбраны соответственно точки K, L, M, а внутри треугольника выбрана точка P так, что $PL||BC$, $PM||CA$, $PK||AB$. Может ли оказаться, что все три трапеции $AMPL$, $BKPM$, $CLPK$ – описанные?

Ответ: не может..

Решение. PK, PL, PM кесінділерін қабырғамен қиылысқанға дейін созайық және қиылысқан нүктелерін сәйкесінше E, F, G деп белгілейік (сур). Шеңбер іштей сызылу үшін



$AL+PM = AM+PL$ болу керек, бұдан $AE+EL+PM-AM-PL = 0$ немесе ($AMPE$ – параллелограмм екенін қолданып)

$$2PM + EL - PE - PL = 0.$$

Осы теңдікті дәл осылай шығатын теңдіктермен

$$2PL + GK - PG - PK = 0$$

және

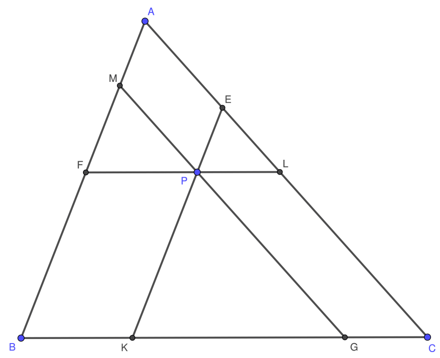
$$2PK + FM - PF - PM = 0$$

қосып,

$$(PK + GK - PG) + (PM + FM - PF) + (PL + EL - PE) = 0$$

теңдігін аламыз. Бірақ үшбұрыштар теңсіздігін қолданып, әр жақша оң болатынын байқайық. Қарама қайшылық.

Продлим отрезки PK, PL, PM до пересечения со сторонами в точках E, F, G (рис). Из критерия описанности имеем



$AL + PM = AM + PL$, откуда $AE + EL + PM - AM - PL = 0$ или (используя то, что $AMPE$ – параллелограмм)

$$2PM + EL - PE - PL = 0.$$

Сложим это равенство с аналогичными равенствами

$$2PL + GK - PG - PK = 0$$

и

$$2PK + FM - PF - PM = 0,$$

получим

$$(PK + GK - PG) + (PM + FM - PF) + (PL + EL - PE) = 0.$$

Но, согласно неравенству треугольника,каждая скобка в левой части положительна. Противоречие.

Задача 9.5

Для положительных a,b,c,a_1,b_1,c_1 *таких* $2 \leqslant \frac{x}{x_i} \leqslant 18 (x = a,b,c)$. *Докажите, что*

$$(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2) \leqslant \frac{25}{9}(a\cdot a_1 + b\cdot b_1 + c\cdot c_1)^2$$

Есепті жалпы түрде қарастырайық. $\frac{a_k}{b_k} \in [\alpha, \beta]$ болсын, бұл жерде $\alpha > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Онда

$$\left(\beta - \frac{a_k}{b_k}\right)\left(\frac{a_k}{b_k} - \alpha\right) \geqslant 0$$

бұдан біз

$$a_k^2 + \alpha\beta b_k^2 \leqslant (\alpha+\beta)a_k b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

теңсіздігін аламыз. Онда

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 + \alpha\beta \sum_{k=1}^n b_k^2 \leqslant (\alpha+\beta)\sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

$AM \geqslant GM$ теңсіздігін қолданып

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\alpha\beta \sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 + \alpha\beta \sum_{k=1}^n b_k^2\right)$$

теңсіздігін аламыз. Демек

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\alpha\beta \sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

Давайте обобщим задачу. Пусть $\frac{a_k}{b_k} \in [\alpha, \beta]$, $\alpha > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\left(\beta - \frac{a_k}{b_k}\right)\left(\frac{a_k}{b_k} - \alpha\right) \geqslant 0$$

следовательно

$$a_k^2 + \alpha\beta b_k^2 \leqslant (\alpha+\beta)a_k b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 + \alpha\beta \sum_{k=1}^n b_k^2 \leqslant (\alpha+\beta)\sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

Из неравенство $AM \geqslant GM$ получаем

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\alpha\beta \sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 + \alpha\beta \sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

Значит

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\alpha\beta \sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

Задача 9.6

Найти все натуральные a,b,c такие, что

$$[a,b,c] = \frac{ab+bc+ca}{5}.$$

Здесь $[x,y]$– наименьшее общее кратное чисел x и y.

$(a,b,c) = d, (a/d,b/d) = x, (b/d,c/d) = y, (c/d,a/d) = z$ болсын. Онда a,b,c сандарын сәйкесінше $dxzk,dxym,dyzn$ деп ала аламыз (бұл жерде $(zk,ym) = (xm,zn) = (xk,yn) = 1$).

$[a,b,c] = \frac{ab+bc+ca}{5}$ k-ға бөлінетінін байқайық. Демек bc k-ға бөлінеді. Бірақ k a санының бөлгіші, ал b,c сандарының бөлгіші емес. Демек $k = 1$. Дәл солай $m = n = 1$.

Теңдігіміздің орнына қоямыз

$$dxyz = \frac{d^2xyz(x+y+z)}{5}.$$

Теңдікте бәрін $dxyz$ қысқартып тастайық

$$5 = d(x+y+z) \Rightarrow$$

$$d = 1$$

$x,y,z \geqslant 1$ болғандықтын.

Б.О.О $x \geqslant y \geqslant z \Rightarrow$

$$x = y = 2, z = 1. \Rightarrow$$

$$(a,b,c) = (4,2,2).$$

Жауабы

$$(a,b,c) = (4,2,2),(2,4,2),(2,2,4).$$

Пусть $(a,b,c) = d, (a,b) = x, (b,c) = y, (c,a) = z$. Тогда можно взять a,b,c как $dxzk,dxym,dyzn$ соответсвенно(где $(zk,ym) = (xm,zn) = (xk,yn) = 1$).

Заметим, что $[a,b,c] = \frac{ab+bc+ca}{5}$ делится на k. Значит, bc тоже делится на k. Но k делитель a но не b,c. Следовательно $k = 1$.Аналогично получим, $m = n = 1$.

Поставим в наше уравнение и получим

$$dxyz = \frac{d^2xyz(x+y+z)}{5}.$$

Сократим всё на $dxyz$

$$5 = d(x+y+z) \Rightarrow$$

$$d = 1$$

так как $x,y,z \geqslant 1$.

Без ограничения общности будем считать, что $x \geqslant y \geqslant z \Rightarrow$

$$x = y = 2, z = 1. \Rightarrow$$

$$(a,b,c) = (4,2,2).$$

Ответ

$$(a,b,c) = (4,2,2),(2,4,2),(2,2,4).$$