Математика пәні бойынша Республикалық оқушылар олимпиадасының үшінші (облыстық) кезеңі (2022-2023 оқу жылы)

9-сынып

1 тур

Жұмыс уақыты: 3 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1. ABC сүйір бұрышты үшбұрышы берілсін және H – ортоцентр. AH түзуі BC қабырғасын және ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңберін сәйкесінше A_1 және A_2 нүктелерінде қисын. Дәл солай B_1, B_2 және C_1, C_2 нүктелерін анықтаймыз. A_2B_1 және A_2C_1 түзулері ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңберін сәйкесінше X және Y нүктелерінде қисын. P $(P \neq B_1)$ нүктесі B_1B_2X үшбұрышына сырттай сызылған шеңбермен AC қабырғасының қиылысу нүктесі және Q $(Q \neq C_1)$ нүктесі C_1C_2Y үшбұрышына сырттай сызылған шеңбермен AB қабырғасының қиылысу нүктесі болсын. $PQ||BC$ болатынын дәлелдеңіз.

2. Ұзын тар дәлізде бірнеше жол төселген(барлық жолдар дәлізге параллель және олардың еңдері дәліздің еніне тең). Кез келген екі жолдың қиылысатыны белгілі болса, онда осы жолдардың барлығын еденге бір шегемен шегелеуге болатынын дәлелдеңіз.

3. Кез келген оң нақты a, b, c, d сандары үшін келесі теңсіздікті

$$\frac{1}{a+2b+3c+4d}+\frac{1}{b+2c+3d+4a}+\frac{1}{c+2d+3a+4b}+\frac{1}{d+2a+3b+4c} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{10a}+\frac{1}{10b}+\frac{1}{10c}+\frac{1}{10d}$$

дәлелдеңіз.

Третий (областной) этап Республиканской олимпиады школьников по математике (2022-2023 учебный год)

9 класс

1 тур

Время работы: 3 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. Дан остроугольный треугольник ABC, $H-$ ортоцентр. Прямая AH пересекает BC и описанную окружность ABC в точках A_1 и A_2 соответственно. Аналогично определим точки B_1,B_2 и C_1,C_2. Прямые A_2B_1 и A_2C_1 пересекают описанную окружность ABC вторично в точках X и Y соответственно. Пусть P точка пересечения описанной окружности треугольника B_1B_2X с AC где $(P \neq B_1)$ и Q точка пересечения описанной окружности треугольника C_1C_2Y с AB $(Q \neq C_1)$. Докажите, что $PQ \parallel BC$.

2. В длинном узком коридоре постелено несколько дорожек(все дорожки параллельны коридору и можно считать ,что ширина каждой дорожки равна ширине коридора). Докажите, что можно одним гвоздём прибить все эти дорожки к полу, если известно, что любые две дорожки пересекаются.

3. Докажите, что для любых положительных a,b,c,d справедливо неравенство

$$\frac{1}{a+2b+3c+4d}+\frac{1}{b+2c+3d+4a}+\frac{1}{c+2d+3a+4b}+\frac{1}{d+2a+3b+4c} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{10a}+\frac{1}{10b}+\frac{1}{10c}+\frac{1}{10d}$$

Решения и критерии оценивания второго (районного) этапа Республиканской олимпиады школьников по математике

2022-2023 учебный год

9 класс

Общие положения по проверке работ

1. Приведённые критерии оценивания являются приблизительными. Учащиеся (как и проверяющие), возможно, смогут найти и другие верные решения. Жюри имеет право вносить изменения в критерии, проголосовав за них коллегиально. Главное, чтобы все работы участников оценивались по одинаковым критериям.

2. Перед проверкой жюри следует внимательно изучить олимпиадные задания, их решения и критерии. Желательно прорешать задания самим для возможного поиска альтернативных решений.

3. По окончании проверки обязательно надо проводить разбор и апелляцию задач, притом разборы желательно делать до апелляции и при разборе рассказывать ученикам, за что снимались баллы, а за что добавлялись. Это значительно сократить число учеников желающих подать на апелляцию.

4. В целях более справедливой оценки желательно чтобы одну задачу проверял один человек (или, согласованно, одна группа). В конце, если позволяет время, то следует перепроверить горизонтально (один человек проверяет все задачи одного школьника).

5. Следует помнить, что олимпиадная работа – это не контрольная работа. При оценивании олимпиадных работ, в отличие от оценивания типовых заданий по математике, недопустимо снимать баллы за исправления в работе, за слишком длинное решение, или если решение школьника отличается от решения, приведенного в учебных пособиях.

6. Не следует слишком строго наказывать за технические ошибки или недостатки в решении: описки, легко устранимые арифметические ошибки, непринципиальные моменты в ходе решения, напримеручастник до конца не упростил ответ, не совсем строгий порядок изложение или пропуск очевидных моментов, не влияющих в целом на ход решения. В зависимости от серьёзности ошибки или недостатка снимается не более 2 баллов, в некоторых ситуациях вообще снимать не следует.

7. Внимательно проверяйте насколько соответствует решение критериям проверки. В особенности, если решение ученика неполное и / или альтернативное официальному. Важно понять, насколько участник продвинулся по критериям, какие случае идеи он предлагает и какие факты им получены или доказаны. В альтернативного решения желательно обсудить решения и критерии для этого решения коллегиально.

8. Однако текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен оцениваться в 0 баллов. Баллы за «старание участника» не выставляются, даже если участник исписал много страниц или построил «красивый» чертёж. Если участник «угадал» правильный ответ, не приводит никаких объяснений, как он его получил, то за это не следует давать баллов.

9. Часто на олимпиадах можно встретить так называемые «счётные решения», когда участник пытается решить задачу «в лоб», опираясь только на алгебраические операции, метод координат, векторный метод, теоремы косинусов, синусов, Чевы, Менелая и т. п., не применяя никакую идею, отличного от технического счёта. Обычно такие решения (если вообще возможно решить таким способом задачу) занимают много страниц текста. К таким «счётным» решениям по сложившейся многолетней традицииприменяется следующая схема оценивания:

   - если участник смог довести своё счётное решение до конца, то он получает полные **7 баллов**;
   - если участник не довёл своё «счётное» решение до конца (независимо насколько он продвинулся) и / или допустил вычислительную ошибку — **0 баллов**.

10. На математических олимпиадах преимущественно закрепилась наилучшим образом зарекомендовавшая себя 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице ниже. Таблица примерная, к каждой задаче следует подходить индивидуально.

Примерные критерии оценивания задач

Баллы	**Отметка**	**Правильность (ошибочность) решения**
7	$+$	Полное верное решение.
6-7	$\underset{\cdot}{+}$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	$\underset{\bullet}{+}$ или $\underset{-}{+}$	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	$\pm$	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	$\dot{-}$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	$-$	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	$-$	Решение отсутствует.

Задача 9.1

Дан остроугольный треугольник ABC, $H-$ ортоцентр. Прямая AH пересекает BC и описанную окружность ABC в точках A_1 и A_2 соответственно. Аналогично определим точки B_1,B_2 и C_1,C_2. Прямые A_2B_1 и A_2C_1 пересекают описанную окружность ABC вторично в точках X и Y соответственно. Пусть P точка пересечения описанной окружности треугольника B_1B_2X с AC где $(P \neq B_1)$ и Q точка пересечения описанной окружности треугольника C_1C_2Y с AB $(Q \neq C_1)$. Докажите, что $PQ \parallel BC$.

$PB_2 = PH$ екенін байқайық. Тағы да

$$\angle HPB_2 = 2 \cdot \angle CPB_2 = 2 \cdot \angle A_2XB_2 = 2 \cdot \angle HAB_2.$$

Демек, P нүктесі AB_2H үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрі және бұдан $PA = PH$ шығады. Дәл солай $QA = QH$. Демек, $PQ \perp AH$ және $AH \perp BC$ бұдан $PQ||BC$ екенін аламыз.

Известно, что $PB_2 = PH$. Также

$$\angle HPB_2 = 2 \cdot \angle CPB_2 = 2 \cdot \angle A_2XB_2 = 2 \cdot \angle HAB_2.$$

Значит P центр описанной окружности треугольника AB_2H и $PA = PH$. Аналогично $QA = QH$. Значит $PQ \perp AH$ и поскольку $AH \perp BC$ получаем параллельность PQ и BC.

Задача 9.2

В длинном узком коридоре постелено несколько дорожек(все дорожки параллельны коридору и можно считать ,что ширина каждой дорожки равна ширине коридора). Докажите, что можно одним гвоздём прибить все эти дорожки к полу, если известно, что любые две дорожки пересекаются.

$[a_i, b_i]$ (бұл жерде $i = 1, 2, \dots, n$) берілген кесінді-жолдар болсын. $a = a_i = max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $b = b_j = min\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ болсын. Егер $a > b$ болса, онда $[a_i, b_i]$ және $[a_j, b_j]$ кесінділері қиылыспайды – қарама қайшылық шықты. Демек, $a \leqslant b$, яғни барлық кесінділер $[a, b]$ кесіндісін қамтиды.

Пусть $[a_i,b_i]$,$i = 1,2,\dots,n$−данные отрезки-дорожки. Положим$a = a_i = max a_1,a_2,\dots,a_n$,$b = b_j = min b_1,b_2,\dots,b_n$. Если $a > b$,то отрезки $[a_i,b_i]$ и $[a_j,b_j]$ непересекаются-противоречие. Значит, $a \leqslant b$, и все отрезки содержат отрезок $[a,b]$.

Задача 9.3

Докажите, что для любых положительных a,b,c,d справедливо неравенство

$$\frac{1}{a+2b+3c+4d}+\frac{1}{b+2c+3d+4a}+\frac{1}{c+2d+3a+4b}+\frac{1}{d+2a+3b+4c}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{10a}+\frac{1}{10b}+\frac{1}{10c}+\frac{1}{10d}$$

Коши теңсіздігі бойынша

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}+\frac{4}{d}=\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{2b}+\frac{3^2}{3c}+\frac{4^2}{4d}\geqslant\frac{(1+2+3+4)^2}{a+2b+3c+4d}=\frac{100}{a+2b+3c+4d}.$$

Дәл солай

$$\frac{1}{b}+\frac{2}{c}+\frac{3}{d}+\frac{4}{a}\geqslant\frac{100}{b+2c+3d+4a},$$
$$\frac{1}{c}+\frac{2}{d}+\frac{3}{a}+\frac{4}{b}\geqslant\frac{100}{c+2d+3a+4b},$$
$$\frac{1}{d}+\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}\geqslant\frac{100}{d+2a+3b+4c}$$

теңсіздіктерін аламыз. Осыларды қоссақ керек теңсіздікті аламыз.

По неравенству Коши

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}+\frac{4}{d}=$$
$$=\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{2b}+\frac{3^2}{3c}+\frac{4^2}{4d}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{(1+2+3+4)^2}{a+2b+3c+4d}=\frac{100}{a+2b+3c+4d}$$

. Аналогично получим

$$\frac{1}{b}+\frac{2}{c}+\frac{3}{d}+\frac{4}{a}\geqslant\frac{100}{b+2c+3d+4a},$$

$$\frac{1}{c}+\frac{2}{d}+\frac{3}{a}+\frac{4}{b}\geqslant\frac{100}{c+2d+3a+4b},$$
$$\frac{1}{d}+\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}\geqslant\frac{100}{d+2a+3b+4c}.$$

Сложив полученные неравенства, получим требуемое.