Математика пәні бойынша
Республикалық оқушылар олимпиадасының
үшінші (облыстық) кезеңі (2022-2023 оқу жылы)

11-сынып

2 тур

Жұмыс уақыты: 3 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

4. Карталарда $0, 1, 2, \ldots, p-1$ сандары жазылған, бұл жерде p – жай сан. Бірнеше картадағы сандардың қосындысы p-ға бөлінетіндей қанша тәсілмен сол карталарды таңдай аламыз?

5. $\frac{m^n+1}{n}$– жай сан болатындай барлық m және $n > 2$ натурал жұптарын табыңыз.

6. G графының төбелері 1-ден $(p-1)$-ге дейінгі сандармен нөмерленіп шықты, бұл жердегі $p > 3$ жай сан. Кез келген x және y төбелері үшін, $x^n + y^n$ саны p-ға бөлінетіндей n саны табылса, онда сол төбелерді қабырғамен байланыстырамыз. G графында барлық төбелерін тек бір рет қана өтетін цикл (тұйық жол) бар екенін дәлелдеңіз.

Третий (областной) этап
Республиканской олимпиады школьников
по математике (2022-2023 учебный год)

11 класс

2 тур

Время работы: 3 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

4. На карточках написаны 0,1,2,…,$p-1$, где p– простое. Сколькими способами можно выбрать несколько карточек так чтобы сумма чисел на карточках делилась на p?

5. Найдите все пары натуральных чисел m и $n > 2$, для которых число $\frac{m^n+1}{n}$–простое.

6. В графе G вершины пронумерованы числами от 1 до $(p-1)$, где $p > 3$ простое. Между любыми двумя вершинами x и y ставится ребро, если существует натуральное n, для которого $x^n + y^n$ делится на p. Докажите, что в G существует цикл (замкнутый путь), который проходит через каждую вершину данного графа ровно по одному разу.

Решения и критерии оценивания второго (районного) этапа Республиканской олимпиады школьников по математике

2022-2023 учебный год

11 класс

Общие положения по проверке работ

1. Приведённые критерии оценивания являются приблизительными. Учащиеся (как и проверяющие), возможно, смогут найти и другие верные решения. Жюри имеет право вносить изменения в критерии, проголосовав за них коллегиально. Главное, чтобы все работы участников оценивались по одинаковым критериям.

2. Перед проверкой жюри следует внимательно изучить олимпиадные задания, их решения и критерии. Желательно прорешать задания самим для возможного поиска альтернативных решений.

3. По окончании проверки обязательно надо проводить разбор и апелляцию задач, притом разборы желательно делать до апелляции и при разборе рассказывать ученикам, за что снимались баллы, а за что добавлялись. Это значительно сократить число учеников желающих подать на апелляцию.

4. В целях более справедливой оценки желательно чтобы одну задачу проверял один человек (или, согласованно, одна группа). В конце, если позволяет время, то следует перепроверить горизонтально (один человек проверяет все задачи одного школьника).

5. Следует помнить, что олимпиадная работа – это не контрольная работа. При оценивании олимпиадных работ, в отличие от оценивания типовых заданий по математике, недопустимо снимать баллы за исправления в работе, за слишком длинное решение, или если решение школьника отличается от решения, приведенного в учебных пособиях.

6. Не следует слишком строго наказывать за технические ошибки или недостатки в решении: описки, легко устранимые арифметические ошибки, непринципиальные моменты в ходе решения, напримеручастник до конца не упростил ответ, не совсем строгий порядок изложение или пропуск очевидных моментов, не влияющих в целом на ход решения. В зависимости от серьёзности ошибки или недостатка снимается не более 2 баллов, в некоторых ситуациях вообще снимать не следует.

7. Внимательно проверяйте насколько соответствует решение критериям проверки. В особенности, если решение ученика неполное и / или альтернативное официальному. Важно понять, насколько участник продвинулся по критериям, какие случае идеи он предлагает и какие факты им получены или доказаны. В альтернативного решения желательно обсудить решения и критерии для этого решения коллегиально.

8. Однако текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен оцениваться в 0 баллов. Баллы за «старание участника» не выставляются, даже если участник исписал много страниц или построил «красивый» чертёж. Если участник «угадал» правильный ответ, не приводит никаких объяснений, как он его получил, то за это не следует давать баллов.

9. Часто на олимпиадах можно встретить так называемые «счётные решения», когда участник пытается решить задачу «в лоб», опираясь только на алгебраические операции, метод координат, векторный метод, теоремы косинусов, синусов, Чевы, Менелая и т. п., не применяя никакую идею, отличного от технического счёта. Обычно такие решения (если вообще возможно решить таким способом задачу) занимают много страниц текста. К таким «счётным» решениям по сложившейся многолетней традицииприменяется следующая схема оценивания:

   - если участник смог довести своё счётное решение до конца, то он получает полные **7 баллов**;
   - если участник не довёл своё «счётное» решение до конца (независимо насколько он продвинулся) и / или допустил вычислительную ошибку — **0 баллов**.

10. На математических олимпиадах преимущественно закрепилась наилучшим образом зарекомендовавшая себя 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице ниже. Таблица примерная, к каждой задаче следует подходить индивидуально.

Примерные критерии оценивания задач

Баллы	**Отметка**	**Правильность (ошибочность) решения**
7	$+$	Полное верное решение.
6-7	$\underset{\cdot}{+}$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	$\underset{\bullet}{+}$ или $\underset{-}{+}$	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	$\pm$	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	$\dot{-}$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	$-$	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	$-$	Решение отсутствует.

Задача 11.4

На карточках написаны 0,1,2, . . . ,p−1, где p− простое. Сколькими способами можно выбрать несколько карточек так чтобы сумма чисел на карточках делилась на p?

Егер $p = 2$ болса, онда жауап 1. Енді $p > 2$ болсын. Барлық карточкадағы сандардың қосындысы $0+1+\ldots+p-1$ p-ға бөлінетінін байқайық. k саннан тұратын жиын қарастырайық ($k < p$ және қосындысы p-ға бөлінуі міндетті емес). Енді, әр санға 1-ді қосып p модулі бойынша қарастырайық. Жаңа жиын алдық. Солай тағы да $p-2$ рет жасап барлығы p жиын аламыз. Бастапқы жиындағы сандардың қосындысы s болсын, онда қалған жиындағы сандардың қосындысы p модулі бойынша $s+k, s+2k, \ldots, s+(p-1)k$ тең болады. $k < p$ болғандықтан, барлық қарастырылған қосындылар p модулі бойынша барлық қалдықтарды беріп шығады. Демек, p жиынның сандарының қосындысы p модулі бойынша барлық қалдықтар беретіндей, біз барлық k саннан тұратын жиындарды p-ға бөліп шығуға болады. Демек, барлығы $\frac{\binom{p}{k}}{p}$ k саннан тұратын жиынның сандарының қосындысы p-ға бөлінеді. Онда жауабы:

$$\frac{\binom{p}{1}}{p} + \frac{\binom{p}{2}}{p} + \ldots + \frac{\binom{p}{p-1}}{p} + 1 = \frac{\binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \ldots + \binom{p}{p-1}}{p} + 1 = \frac{2^p - 2}{p} + 1.$$

В случае $p = 2$, ответ 1. Пусть теперь $p > 2$. Заметим, что тогда сумма чисел на всех карточках $0+1+\ldots+p-1$ делятся на p. Рассмотрим набор из k чисел ($k < p$ и необязательно чтобы сумма чисел делилось на p). Теперь, прибавим 1 к каждому числу и рассмотрим по модулю p. Получили новый набор. И так делаем еще $p-2$ раза и мы получаем p наборов. Пусть сумма чисел начального набора s, то сумма чисел остальных наборов по модулю p будет $s+k, s+2k, \ldots, s+(p-1)k$. Так как $k < p$, то эти суммы дают полную систему вычетов по модулю p. Таким образом мы можем все наборы из k чисел разделить по p, чтобы все p набора давали полную систему вычетов по модулю p. Значит, всего

$\frac{\binom{p}{k}}{p}$ наборов из k чисел делятся на p. Тогда всего:

$$\frac{\binom{p}{1}}{p} + \frac{\binom{p}{2}}{p} + \ldots + \frac{\binom{p}{p-1}}{p} + 1 = \frac{\binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \ldots + \binom{p}{p-1}}{p} + 1 = \frac{2^p - 2}{p} + 1.$$

Задача 11.5

Найдите все пары натуральных чисел m и $n > 2$, для которых число $\frac{m^n+1}{n}$ — простое.

Бірінші жағдай: $n = p^k t$ болсын, бұл жерде $p - n$ санының тақ жай бөлгіші (t p-ға бөлінбейді). Онда Ферманың кіші теоремасы бойынша $m^t + 1$ p-ға бөлінеді. Индукциямен $m^{p^k t} + 1$ саны p^{k+1} бөлінетінін дәлелдеуге болады. $m^{p^k t} + 1 = nq$ болсын. Егер $(n, q) = 1$ болса онда nq саны p^{k+1} бөлінбейді. Қарама қайшылық. Онда n саны q-ге бөлінеді. Онда $nq \leqslant n^2 < 2^n + 1 \leqslant m^n + 1$ болады, егер $m \geqslant 2$, $n > 3$ болса. Демек, $m = 1$ немесе $n = 3$. Енді екінші жағдай қарастырайық: $n = 2^k$ $(k > 1)$. Онда $m^n + 1$ 4-ке бөлінбейді, ал n 4-ке бөлінеді. Тағы қарама қайшылық. Бізге $m = 1$ және $n = 3$ жағдайларын қарастыру қалды. Егер $m = 1$, онда $n = 1, 2$. Егер $n = 3$, онда $m + 1 = 3$ немесе $m^2 - m + 1 = 3$. Ягни, $m = 2$ немесе $m = 2, -1$. Демек $n = 3$ $m = 2$. Жауабы $(m, n) = (2, 3)$.

Первый случай: Пусть $n = p^k t$, где $p-$ нечетный простой делитель числа n(t не делится на p). Тогда по малой теореме Ферма $m^t + 1$ делится на p. По индукции легко доказать, что $m^{p^k t} + 1$ делится на p^{k+1}. Пусть $m^{p^k t} + 1 = nq$. Если $(n,q) = 1$ то nq не делится на p^{k+1}. Противоречие. Значит n делится на q. Тогда $nq \leqslant n^2 < 2^n + 1 \leqslant m^n + 1$, при $m \geqslant 2, n > 3$. Следовательно $m = 1$ или $n = 3$. Второй случай Пусть $n = 2^k$. Но тогда $m^n + 1$ не делится 4 а n делится. Противоречие. Осталось рассмотреть $m = 1$ и $n = 3$. Если $m = 1$ то $n = 1$.Противоречие. Если $n = 3$ то $m + 1 = 3$ или $m^2 - m + 1 = 3$. То есть $m = 2$ или $m = 2, -1$. Значит $n = 3$,$m = 2$. Ответ $(m,n) = (2,3)$.

Задача 11.6

В графе G вершины пронумерованы числами от 1 до $(p-1)$, где $p>3$ простое. Между любыми двумя вершинами x и y ставится ребро, если существует натуральное n, для которого x^n+y^n делится на p. Докажите, что в G существует цикл (замкнутый путь), который проходит через каждую вершину данного графа ровно по одному разу.

r қалдығы p модулі бойынша квадраттық (квадраттық емес) қалдық деп аталады, егер $x^2 \equiv r(\mod p)$ салыстыру дұрыс болатын бүтін x табылса (табылмаса). 1-ден $p-1$-ге дейінгі сандар арасында дәл $\frac{p-1}{2}$ квадраттық қалдық және дәл $\frac{p-1}{2}$ квадраттық емес қалдық бар екенін байқайық. $n=\frac{p-1}{2}$ болғанда әрбір квадраттық қалдық әрбір квадраттық емес қалдықпен қабырғамен қосылғанын түсіну оңай. Оларды кезекпен қойып біз қажетті циклды аламыз.

Остаток r называется квадратичным (неквадратичным) вычетом по модулю p, если существует (не существует) такое целое x, для которого верно сравнение $x^2 \equiv r \pmod p$. Заметим, что среди чисел от 1 до $p-1$ ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и ровно $\frac{p-1}{2}$ неквадратичных вычетов. При $n=\frac{p-1}{2}$ не сложно понять, что каждый квадратичный вычет связан ребром с каждым неквадратичным вычетом. Выстроив их по очереди получим требуемый цикл.