Математика пәні бойынша
Республикалық оқушылар олимпиадасының
үшінші (облыстық) кезеңі (2022-2023 оқу жылы)

11-сынып

1 тур

Жұмыс уақыты: 3 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1.
$$f\left(\frac{x+y}{2023}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$
болатындай барлық $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ монотонды функцияларын табыңыз.

2. Ұзын тар дәлізде бірнеше жол төселген(барлық жолдар дәлізге параллель және олардың еңдері дәліздің еніне тең). Дәліздің әрбір нүктесі ең көп дегенде k жолдармен жабылатыны белгілі болса, онда әр жиындағы жолдар қиылыспайтындай, жолдарды k жиынға бөлуге болатынын дәлелдеңіз.

3. ABC сүйір бұрышты үшбұрышы берілсін. D,E,F нүктелері сәйкесінше BC,CA,AB қабырғаларының ортасы. EF түзуі ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңберін P және Q нүктелерінде қисын. AP және AQ түзулері BC түзуін сәйкесінше X және Y нүктелерінде қисын. AXY үшбұрышының центроиды DXP және DYQ үшбұрыштарына сырттай сызылған шеңберлерінің радикалдық осінің бойында жататынын дәлелдеңіз.

Третий (областной) этап
Республиканской олимпиады школьников
по математике (2022-2023 учебный год)

11 класс

1 тур

Время работы: 3 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. Найдите все монотонные функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что
$$f(\frac{x+y}{2023})=\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

2. В длинном узком коридоре постелено несколько дорожек(все дорожки параллельны коридору и можно считать ,что ширина каждой дорожки равна ширине коридора). Докажите, что дорожки можно разделить на k множеств так, чтобы в каждом множестве дорожки не пересекались, если известно, что каждая точка коридора покрыта не более чем k дорожками.

3. Дан остроугольный треугольник ABC. Пусть D,E,F середины сторон BC,CA,AB соответственно. Прямая EF пересекает описанную окружность ABC в точках P и Q соответственно. Прямые AP и AQ пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что центроид треугольника AXY лежит на радикальной оси окружностей описанных около треугольников DXP и DYQ.