

Математика пәні бойынша
Республикалық оқушылар олимпиадасының
үшінші (облыстық) кезеңі (2022-2023 оқу жылы)

10-сынып

1 тур

Жұмыс уақыты: 3 сағат 30 минут.

Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1.

$$f\left(\frac{x+y}{4}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

болатындай барлық $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ монотонды функцияларын табыңыз.

2. Ұзын тар дәлізде бірнеше жол төселген (барлық жолдар дәлізге параллель және олардың ендері дәліздің еңіне тең). Кез келген жол қалған жолдардың кем дегенде жартысымен қиылысатыны белгілі болса, онда қалған барлық жолдармен қиылысатын жол бар екенін дәлелдеңіз.

3. ABC сүйір бұрышты үшбұрышы берілсін. D, E, F нүктелері сәйкесінше BC, CA, AB қабырғаларының ортасы. EF түзуі ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңберін P және Q нүктелерінде қисын. AP және AQ түзулері BC түзуді сәйкесінше X және Y нүктелерінде қисын. $AХУ$ үшбұрышының центроиды $DХР$ және DYQ үшбұрыштарына сырттай сызылған шеңберлерінің радикалдық осінің бойында жататынын дәлелдеңіз.

Третий (областной) этап
Республиканской олимпиады школьников
по математике (2022-2023 учебный год)

10 класс

1 тур

Время работы: 3 часа 30 минут.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. Найдите все монотонные функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$f\left(\frac{x+y}{4}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

2. В длинном узком коридоре постелено несколько дорожек (все дорожки параллельны коридору и можно считать, что ширина каждой дорожки равна ширине коридора). Докажите, что найдется дорожка, которая пересекается со всеми оставшимися, если известно, что любая дорожка пересекается не менее чем с половиной из оставшихся.

3. Дан остроугольный треугольник ABC . Пусть D, E, F середины сторон BC, CA, AB соответственно. Прямая EF пересекает описанную окружность ABC в точках P и Q соответственно. Прямые AP и AQ пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что центроид треугольника $AХУ$ лежит на радикальной оси окружностей описанных около треугольников $DХР$ и DYQ .