Математика пәні бойынша
Республикалық оқушылар олимпиадасының
үшінші (облыстық) кезеңі (2022-2023 оқу жылы)

10-сынып

1 тур

Жұмыс уақыты: 3 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1.
$$f\left(\frac{x+y}{4}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$
болатындай барлық $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ монотонды функцияларын табыңыз.

2. Ұзын тар дәлізде бірнеше жол төселген(барлық жолдар дәлізге параллель және олардың еңдері дәліздің еніне тең). Кез келген жол қалған жолдардың кем дегенде жартысымен қиылысатыны белгілі болса, онда қалған барлық жолдармен қиылысатын жол бар екенін дәлелдеңіз.

3. ABC сүйір бұрышты үшбұрышы берілсін. D, E, F нүктелері сәйкесінше BC, CA, AB қабырғаларының ортасы. EF түзуі ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңберін P және Q нүктелерінде қисын. AP және AQ түзулері BC түзуін сәйкесінше X және Y нүктелерінде қисын. AXY үшбұрышының центроиды DXP және DYQ үшбұрыштарына сырттай сызылған шеңберлерінің радикалдық осінің бойында жататынын дәлелдеңіз.

Третий (областной) этап
Республиканской олимпиады школьников
по математике (2022-2023 учебный год)

10 класс

1 тур

Время работы: 3 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. Найдите все монотонные функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что
$$f(\frac{x+y}{4})=\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

2. В длинном узком коридоре постелено несколько дорожек(все дорожки параллельны коридору и можно считать ,что ширина каждой дорожки равна ширине коридора). Докажите, что найдется дорожка, которая пересекается со всеми оставшимися, если известно, что любая дорожка пересекается не менее чем с половиной из оставшихся.

3. Дан остроугольный треугольник ABC. Пусть D,E,F середины сторон BC,CA,AB соответственно. Прямая EF пересекает описанную окружность ABC в точках P и Q соответственно. Прямые AP и AQ пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что центроид треугольника AXY лежит на радикальной оси окружностей описанных около треугольников DXP и DYQ.

Решения и критерии оценивания второго (районного) этапа Республиканской олимпиады школьников по математике

2022-2023 учебный год

10 класс

Общие положения по проверке работ

1. Приведённые критерии оценивания являются приблизительными. Учащиеся (как и проверяющие), возможно, смогут найти и другие верные решения. Жюри имеет право вносить изменения в критерии, проголосовав за них коллегиально. Главное, чтобы все работы участников оценивались по одинаковым критериям.

2. Перед проверкой жюри следует внимательно изучить олимпиадные задания, их решения и критерии. Желательно прорешать задания самим для возможного поиска альтернативных решений.

3. По окончании проверки обязательно надо проводить разбор и апелляцию задач, притом разборы желательно делать до апелляции и при разборе рассказывать ученикам, за что снимались баллы, а за что добавлялись. Это значительно сократить число учеников желающих подать на апелляцию.

4. В целях более справедливой оценки желательно чтобы одну задачу проверял один человек (или, согласованно, одна группа). В конце, если позволяет время, то следует перепроверить горизонтально (один человек проверяет все задачи одного школьника).

5. Следует помнить, что олимпиадная работа – это не контрольная работа. При оценивании олимпиадных работ, в отличие от оценивания типовых заданий по математике, недопустимо снимать баллы за исправления в работе, за слишком длинное решение, или если решение школьника отличается от решения, приведенного в учебных пособиях.

6. Не следует слишком строго наказывать за технические ошибки или недостатки в решении: описки, легко устранимые арифметические ошибки, непринципиальные моменты в ходе решения, напримеручастник до конца не упростил ответ, не совсем строгий порядок изложение или пропуск очевидных моментов, не влияющих в целом на ход решения. В зависимости от серьёзности ошибки или недостатка снимается не более 2 баллов, в некоторых ситуациях вообще снимать не следует.

7. Внимательно проверяйте насколько соответствует решение критериям проверки. В особенности, если решение ученика неполное и / или альтернативное официальному. Важно понять, насколько участник продвинулся по критериям, какие случае идеи он предлагает и какие факты им получены или доказаны. В альтернативного решения желательно обсудить решения и критерии для этого решения коллегиально.

8. Однако текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен оцениваться в 0 баллов. Баллы за «старание участника» не выставляются, даже если участник исписал много страниц или построил «красивый» чертёж. Если участник «угадал» правильный ответ, не приводит никаких объяснений, как он его получил, то за это не следует давать баллов.

9. Часто на олимпиадах можно встретить так называемые «счётные решения», когда участник пытается решить задачу «в лоб», опираясь только на алгебраические операции, метод координат, векторный метод, теоремы косинусов, синусов, Чевы, Менелая и т. п., не применяя никакую идею, отличного от технического счёта. Обычно такие решения (если вообще возможно решить таким способом задачу) занимают много страниц текста. К таким «счётным» решениям по сложившейся многолетней традицииприменяется следующая схема оценивания:

   - если участник смог довести своё счётное решение до конца, то он получает полные **7 баллов**;
   - если участник не довёл своё «счётное» решение до конца (независимо насколько он продвинулся) и / или допустил вычислительную ошибку — **0 баллов**.

10. На математических олимпиадах преимущественно закрепилась наилучшим образом зарекомендовавшая себя 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице ниже. Таблица примерная, к каждой задаче следует подходить индивидуально.

Примерные критерии оценивания задач

Баллы	**Отметка**	**Правильность (ошибочность) решения**
7	$+$	Полное верное решение.
6-7	$\underset{\cdot}{+}$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	$\underset{\bullet}{+}$ или $\underset{-}{+}$	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	$\pm$	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	$\dot{-}$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	$-$	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	$-$	Решение отсутствует.

Задача 10.1

Найдите все монотонные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *такие, что*

$$f(\frac{x+y}{4}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Решение. Берілген теңдікке $x = 3y$ қойып, $f(3y) = f(y)$ теңдігін аламыз. Соңғы теңдікке $y = 1, y = 3^1, y = 3^2, \ldots, y = 3^k, \ldots$ қойып және функцияның монотонды екенін қолданып, кез келген $x \geqslant 1$ үшін $f(x) = c$ шығады (c – тұрақты сан). Дәл солай кез келген $x \leqslant -1$ үшін $f(x) = g$ (g – тұрықты сан). Бастапқы теңдікке $x, \frac{x+y}{2} \geqslant 1$ және $y \leqslant -1$ болатындай x, y қойсақ, онда $c = \frac{c+g}{2} \implies c = g$ шығады. Функция монотонды екенін еске түсіре отырып, кез келген x үшін $f(x) = c$ шығады. Бұл жауап есептің берілгенін қанағаттандыратынына көз жеткізу қиын емес.

Поставим $x = 3y$ и получим $f(3y) = f(y)$. В полученное поставим вместо $y = 1$,$y = 3^1$,$y = 3^2, \ldots$,$y = 3^k, \ldots$ и используя монотонность получим, что $f(x) = c$ для всех $x \geqslant 1$(− некая константа). Аналогично получим, что $f(x) = g$ для всех $x \leqslant -1$(g− некая константа). Поставим в начальное уравнение такие x,y, что x,$\frac{x+y}{4} \geqslant 1$ и $y \geqslant -1$. Тогда получим, что $c = \frac{c+g}{2} \Rightarrow c = g$. Применяя условия монотонности получим, что $f(x) = c$ для всех x. Очевидно, что такая функция удовлетворяет условию задачи.

Задача 10.2

В длинном узком коридоре постелено несколько дорожек(все дорожки параллельны коридору и можно считать ,что ширина каждой дорожки равна ширине коридора). Докажите, что найдется дорожка, которая пересекается со всеми оставшимися, если известно, что любая дорожка пересекается не менее чем с половиной из оставшихся.

Решение. $[a_i, b_i]$ (бұл жерде $i = 1, 2, \ldots, n$) берілген кесінді-жолдар болсын. $a = a_i = max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $b = b_j = min\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ болсын. Егер $a \leqslant b$ болса, онда барлық кесінділер $[a, b]$ кесіндісін қамтиды. Егер олай болмаса, онда $n/2$-ден көп кесінді $[a_i, b_i]$ кесіндісімен қиылысады (кесінді өзінде қияды деп есептейміз), демек, $a = a_i$ нүктесін қамтиды. Дәл солай $n/2$-ден көп кесінді $[a_j, b_j]$ кесіндісімен қиылысады, демек, $b = b_j$ нүктесін қамтиды. Дирихле принципі бойынша a-ны да және b-ны да қамтитын кесінді табылады. Және бұл кесінді барлық кесіндіні қияды.

Пусть $[a_i,b_i]$,$i = 1,2,\ldots,n-$данные отрезки-дорожки. Положим$a = a_i = maxa_1,a_2,\ldots,a_n$,$b = b_j = minb_1,b_2,\ldots,b_n$. Если $a \leqslant b$, то все отрезки содержат отрезок $[a,b]$. Иначе более $n/2$ отрезков пересекают $[a_i,b_i]$ и, значит, содержат точку $a = a_i$ (считаем, что отрезок пересекается сам с собой). Также более $n/2$ отрезков пересекают $[a_j,b_j]$ и, значит, содержат точку $b = b_j$. По принципу Дирихле найдется отрезок, содержащий и a, и b. Этот отрезок пересекает все отрезки.

Задача 10.3

Дан остроугольный треугольник ABC. Пусть D,E,F середины сторон BC,CA,AB соответственно. Прямая EF пересекает описанную окружность ABC в точках P и Q соответственно. Прямые AP и AQ пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что центроид треугольника AXY лежит на радикальной оси окружностей описанных около треугольников DXP и DYQ.

Решение.

$AT||BC$ болатындай ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңберінен T нүктесі алынды, және TD ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңберді K нүктесінде қисын. Онда,

$$\angle DKP = \angle TKP = \angle QKA = \angle QPA = \angle DXP.$$

Демек, K, D, X, P нүктелері бір шеңбердің бойында жатады. Дәл солай K, D, Y, Q нүктелері бір шеңбердің бойында жатады. A және T нүктелері, P және Q нүктелері сияқты, $\angle XDY$ жазық бұрышына қатысы изогональды жұптар екенін байқайық. Онда, DX, DY, DP, DQ түзулеріне изогональдар туралы лемма қолданып, егер XQ және YP түзулері G нүктесінде қиылысса, онда A және G нүктелері $\angle XDY$ бұрышы бойынша изогональды жұп екенін аламыз, демек DK түзуі G нүктесі арқылы өтеді д.к.с.

Пусть точка T находится на окружности ABC так, что $AT \parallel BC$ и пусть прямая TD пересекает окружность ABC во второй раз в точке K. Заметим, что

$$\angle DKP = \angle TKP = \angle QKA = \angle QPA = \angle DXP.$$

Значит точки K,D,X,P лежат на одной окружности. Аналогично можно доказать, что точки K,D,Y,Q лежат на одной окружности. Заметим теперь то, что точки A и T изогонально сопряжены относительно прямого угла $\angle XDY$, также как и точки P и Q. По Лемме об изогональных к

прямым DX, DY, DP, DQ получаем, что если XQ и YP пересекаются в G, то точки A и G изогонально сопряжены относительно $\angle XDY$, откуда DK проходит через G ч.т.д.