Математика пәні бойынша
Республикалық оқушылар олимпиадасының
3-ші (облыстық) кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

9-сынып

2 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

4. Горизонталь түзудің бойынан n қара түсті нүктелер белгіленген. Екі көршілес қара түсті нүктелердің арасынан Арман вертикаль түзу жүргізеді және осы түзудің сол және оң жағында кем дегенде екі қара түсті нүктелер болуы керек. Сосын Арман вертикаль түзудің сол жағындағы барлық қара түсті нүктелерді көк түске бояйды, осыдан кейін осы түзудің оң жағындағы бір немесе екі қара түсті нүктені қызыл түске бояйды, ал қалған қара түсті нүктелерді (егер олар болса) — жасыл түске бояйды. Арман, осылай әрекет жасап, осы нүктелерді әр түрлі 55 тәсілмен бояп шығуға болатынын есептеді. Түзудің бойынан басында қанша қара түсті нүктелер белгіленген?

5. $AB = AC$ және $\angle BAC > 90^\circ$ болатындай ABC үшбұрышы берілген. O нүктесі ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрі. M нүктесі A нүктесіне BC қабырғасына қатысты симметриялы нүкте. BC қабырғасының C нүктесінен созындысынан D нүктесі алынды. DM түзуі ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңберді E және F нүктелерінде қияды. ADE және ADF үшбұрыштарына сырттай сызылаған шеңберлері BC қабырғасын P және Q нүктесінде қияды. A, P, O және Q нүктелері бір шеңбердің бойында жататынын дәлелдеңіз.

6. p — $(4k+1)$ түріндегі жай сан болсын. Келесі шарттарды қанағаттандыратындай барлық натурал a, b және c сандарын табыңыз:

(a) a, b және c сандарының ең үлкен ортақ бөлгіші 1-ге тең;

(b) ab саны p-ға бөлінбейді;

(c) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{cp} = \dfrac{4}{p}$.

3-й (областной) этап
Республиканской олимпиады школьников
по математике (2021-2022 учебный год)

9 класс

2 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

4. На горизонтальной прямой отмечены n чёрных точек. Между двумя соседними чёрными точками Арман проводит вертикальную прямую так, чтобы слева и справа от этой прямой оставалось не менее двух чёрных точек. Затем Арман все чёрные точки, расположенные слева от вертикальной прямой, красит в синий цвет, после этого одну или две чёрные точки справа от этой прямой красит в красный цвет, оставшиеся (если таковые есть) — в зелёный цвет. Арман подсчитал, что, действуя таким образом, он может получить 55 различных раскрасок этих точек. Сколько чёрных точек было отмечено на прямой изначально?

5. Дан треугольник ABC, в котором $AB = AC$ и $\angle BAC > 90^\circ$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Точка M симметрична точке A относительно стороны BC. На продолжении стороны BC за точку C выбрана точка D. Прямая DM пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точках E и F. Окружности, описанные около треугольников ADE и ADF пересекают сторону BC в точках P и Q соответственно. Докажите, что точки A, P, O и Q лежат на одной окружности.

6. Пусть p — простое число вида $(4k+1)$. Найти все такие натуральные числа a, b и c, которые удовлетворяют условиям

(a) наибольший общий делитель чисел a, b и c равен 1;

(b) ab не делится на p;

(c) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{cp} = \dfrac{4}{p}$.

Решения и критерии оценивания 3-го (областного) этапа Республиканской олимпиады школьников по математике

2021-2022 учебный год

9 класс

День 2

Общие положения по проверке работ

1. Приведённые критерии оценивания являются приблизительными. Учащиеся (как и проверяющие), возможно, смогут найти и другие верные решения. Жюри имеет право вносить изменения в критерии, проголосовав за них коллегиально. Главное, чтобы все работы участников оценивались по одинаковым критериям.

2. Перед проверкой жюри следует внимательно изучить олимпиадные задания, их решения и критерии. Желательно прорешать задания самим для возможного поиска альтернативных решений.

3. По окончании проверки обязательно надо проводить разбор и апелляцию задач, притом разборы желательно делать до апелляции и при разборе рассказывать ученикам, за что снимались баллы, а за что добавлялись. Это значительно сократить число учеников желающих подать на апелляцию.

4. В целях более справедливой оценки желательно чтобы одну задачу проверял один человек (или, согласованно, одна группа). В конце, если позволяет время, то следует перепроверить горизонтально (один человек проверяет все задачи одного школьника).

5. Следует помнить, что олимпиадная работа – это не контрольная работа. При оценивании олимпиадных работ, в отличие от оценивания типовых заданий по математике, недопустимо снимать баллы за исправления в работе, за слишком длинное решение, или если решение школьника отличается от решения, приведенного в учебных пособиях.

6. Не следует слишком строго наказывать за технические ошибки или недостатки в решении: описки, легко устранимые арифметические ошибки, непринципиальные моменты в ходе решения, напримеручастник до конца не упростил ответ, не совсем строгий порядок изложение или пропуск очевидных моментов, не влияющих в целом на ход решения. В зависимости от серьёзности ошибки или недостатка снимается не более 2 баллов, в некоторых ситуациях вообще снимать не следует.

7. Внимательно проверяйте насколько соответствует решение критериям проверки. В особенности, если решение ученика неполное и / или альтернативное официальному. Важно понять, насколько участник продвинулся по критериям, какие случае идеи он предлагает и какие факты им получены или доказаны. В альтернативного решения желательно обсудить решения и критерии для этого решения коллегиально.

8. Однако текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен оцениваться в 0 баллов. Баллы за «старание участника» не выставляются, даже если участник исписал много страниц или построил «красивый» чертёж. Если участник «угадал» правильный ответ, не приводит никаких объяснений, как он его получил, то за это не следует давать баллов.

9. Часто на олимпиадах можно встретить так называемые «счётные решения», когда участник пытается решить задачу «в лоб», опираясь только на алгебраические операции, метод координат, векторный метод, теоремы косинусов, синусов, Чевы, Менелая и т. п., не применяя никакую идею, отличного от технического счёта. Обычно такие решения (если вообще возможно решить таким способом задачу) занимают много страниц текста. К таким «счётным» решениям по сложившейся многолетней традицииприменяется следующая схема оценивания:

   - если участник смог довести своё счётное решение до конца, то он получает полные **7 баллов**;
   - если участник не довёл своё «счётное» решение до конца (независимо насколько он продвинулся) и / или допустил вычислительную ошибку — **0 баллов**.

10. На математических олимпиадах преимущественно закрепилась наилучшим образом зарекомендовавшая себя 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице ниже. Таблица примерная, к каждой задаче следует подходить индивидуально.

Примерные критерии оценивания задач

Баллы	Отметка	Правильность (ошибочность) решения
7	$+$	Полное верное решение.
6-7	$\underset{\cdot}{+}$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	$\underset{\bullet}{+}$ или $\underset{-}{+}$	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	$\pm$	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	$\dot{-}$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	$-$	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	$-$	Решение отсутствует.

Задача 9.4

На горизонтальной прямой отмечены n чёрных точек. Между двумя соседними чёрными точками Арман проводит вертикальную прямую так, чтобы слева и справа от этой прямой оставалось не менее двух чёрных точек. Затем Арман все чёрные точки, расположенные слева от вертикальной прямой, красит в синий цвет, после этого одну или две чёрные точки справа от этой прямой красит в красный цвет, оставшиеся (если таковые есть) — в зелёный цвет. Арман подсчитал, что, действуя таким образом, он может получить 55 различных раскрасок этих точек. Сколько чёрных точек было отмечено на прямой изначально?

Ответ: 8.

Решение. Разобьём задачу на два случая.

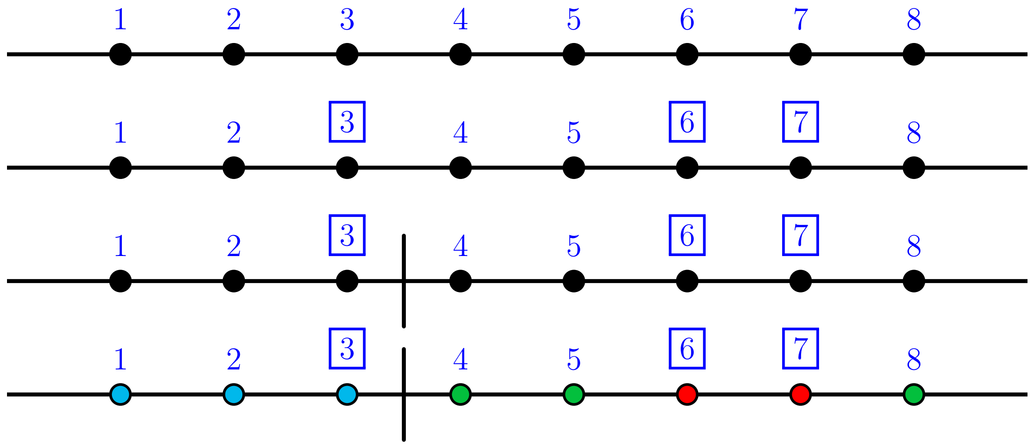
Случай 1. Подсчитаем количество раскрасок, когда Арман красит в красный цвет только две чёрные точки.

Посмотрим, как можно по-другому организовать процесс раскраски, указанный в задаче:

- пронумеруем все чёрные точки слева направо числами от 1 до n;
- выберем три числа среди чисел от 2 до n включительно;
- пусть были выбраны числа i, j, k ($2 \leqslant i < j < k \leqslant n$), вертикальную прямую проводим между точками с номерами i и $i+1$;
- соответственно красим в синий цвет все точки с номерами от 1 до i включительно, точки с номерами j и k красим в красный цвет, остальные — в зелёный.

Заметим, что каждому выбору трёх чисел указанным способом соответствует определённая раскраска, и, наоборот, каждой раскраске соответствует ровно один набор из трёх точек.

Ниже на рисунке показано, как работает этот алгоритм.



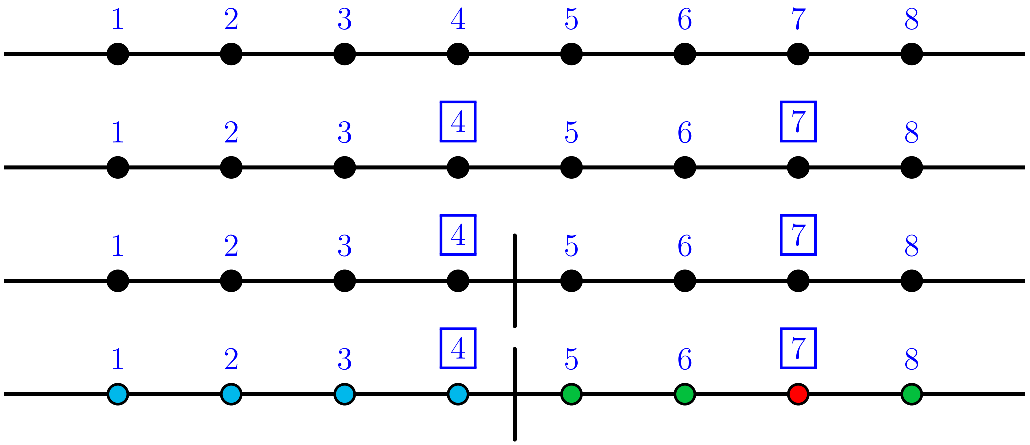
Таким образом, в этом случае количество раскрасок чёрных точек равно количеству способов выбрать три точки среди точек с номерами от 2 до n. Значит, и количество различных раскрасок в этом случае равно C_{n-1}^3.

Случай 2. Подсчитаем количество раскрасок, когда Арман красит в красный цвет только одну чёрную точку. Также как и в прошлом случае пронумеруем все точки слева направа числами от 1 до n. В этом случае процесс раскраски организуем аналогично случаю 1:

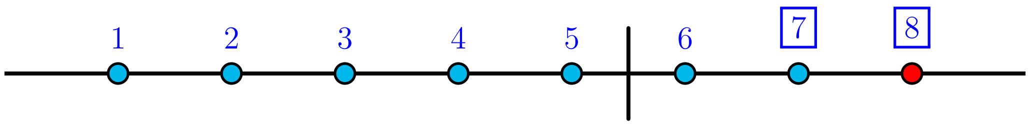
- выберем два числа среди чисел от 2 до $n-1$ включительно;
- пусть были выбраны числа i, j ($2 \leqslant i < j \leqslant n-1$), вертикальную прямую проводим между точками с номерами i и $i+1$;
- соответственно красим в синий цвет все точки с номерами от 1 до i включительно, точку с номером j красим в красный цвет, остальные — в зелёный.

Заметим, что также, как и в первом случае, каждому выбору трёх чисел указанным способом соответствует определённая раскраска, и, наоборот, каждой раскраске соответствует ровно один набор из трёх точек. Единственный случай, который следует исключить, это выбор чисел $n-1$, n, так как в этом случае справа остаётся только одна точка (а нужно минимум две).

Ниже на рисунке показано, как это работает.



Случай, который исключается:



Таким образом, в этом случае количество раскрасок чёрных точек равно количеству способов выбрать две точки среди точек с номерами от 2 до n без одного случая. Значит, и количество различных раскрасок в этом случае равно $C_{n-1}^2 - 1$.

Объединяя случаи 1 и 2 получим, что общее количество раскрасок равно

$$C_{n-1}^3 + C_{n-1}^2 - 1 = \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} + \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} - 1 =$$
$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 =$$
$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3) + 3(n-1)(n-2) - 6}{6} =$$
$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3) + 3(n^2-3n+2) - 6}{6} =$$
$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3) + 3(n^2-3n)}{6} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3) + 3n(n-3)}{6} =$$
$$= \frac{(n-3)((n-1)(n-2) + 3n)}{6} =$$
$$= \frac{(n-3)(n^2-3n+2+3n)}{6} =$$
$$= \frac{(n-3)(n^2+2)}{6}.$$

Известно, что общее количество раскрасок равно 55. Поэтому получаем уравнение

$$\frac{(n-3)(n^2+2)}{6} = 55.$$

Из условия следует, что $n \geqslant 4$. Левая часть уравнения при $n \geqslant 4$ левая часть уравнения строго возастает, значит, данное уравнение имеет не более одного корня.

Заметим, что $n = 8$ является корнем уранения. Значит, при $n \geqslant 4$ уравнение имеет единственное решение $n = 8$.

Примерная схема оценивания

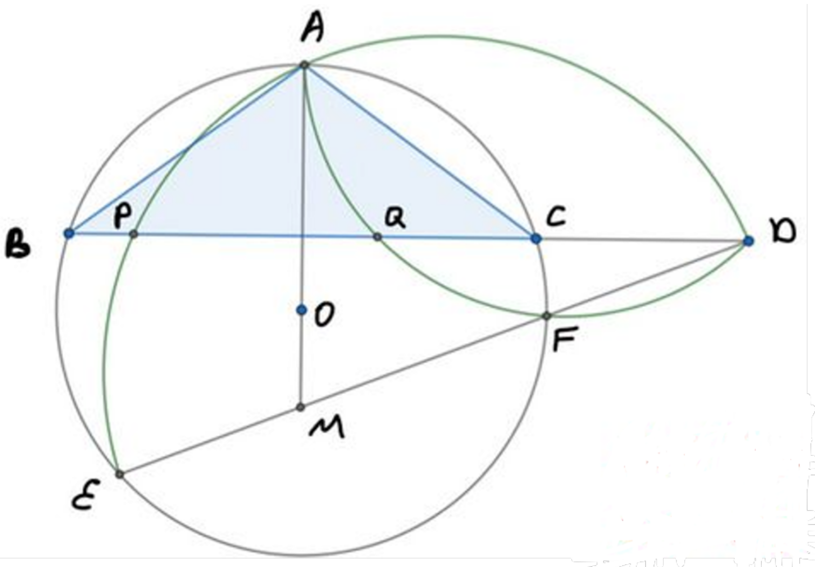
1. Получено количество способов в зависимости от n для Случая 1 **(2 балла)**.
2. Получено количество способов в зависимости от n для случая 2 **(2 балла)**.
3. Найдено общее количество способов в зависимости от n **(5 баллов)**.

   Примечание. Баллы пункта 3 не суммируются с баллами пунктов 1 и 2.
4. Правильно определено количество чёрных точек **(2 балла)**.
5. Правильный ответ без обоснования **(0 баллов).**

Задача 9.5

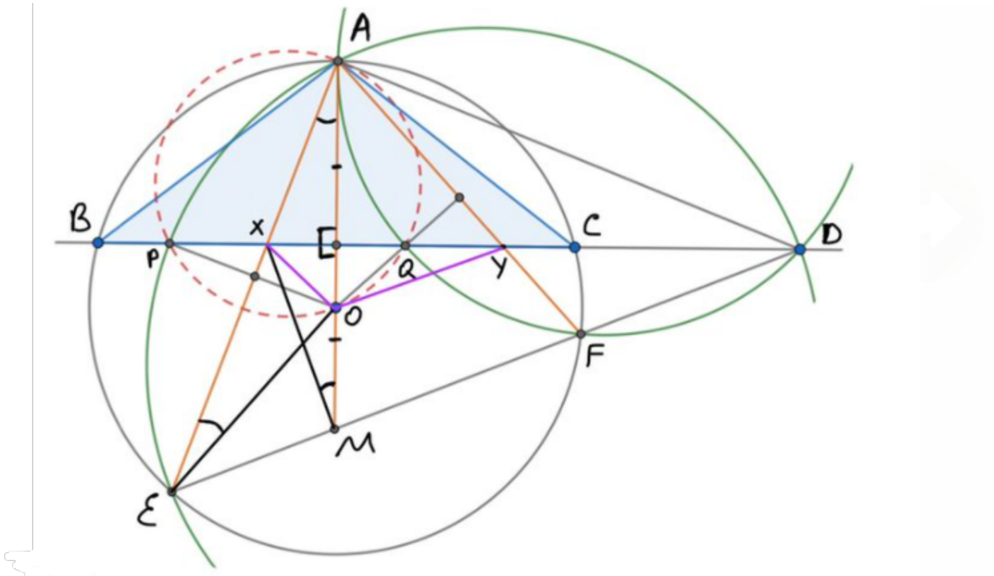
Дан треугольник ABC, в котором $AB = AC$ и $\angle BAC > 90°$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Точка M симметрична точке A относительно стороны BC. На продолжении стороны BC за точку C выбрана точка D. Прямая DM пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точках E и F. Окружности, описанные около треугольников ADE и ADF пересекают сторону BC в точках P и Q соответственно. Докажите, что точки A, P, O и Q лежат на одной окружности.

Решение.



Первый способ. Докажем, что точка A принадлежит окружности ω, описанной около треугольника POQ.

Проведём отрезки AE и AF. Пусть AE и AF пересекают BC в точках X и Y соответственно.



Так как $OA = OE$, то $\angle OAE = \angle OEA = \varphi$.

Точки A и M симметричны относительно BC, следовательно, $AX = XM$. Отсюда $\angle XMA = \angle XAM = \varphi$. Таким образом, четырёхугольник $XEMO$ вписанный и $\angle AXO = \angle OME$.

Аналогично получаем, что четырёхугольник $YFMO$ вписанный и $\angle OMF = \angle OYA$.

Значит,

$$\angle AXO + \angle OYA = \angle OME + \angle OMF = 180°.$$

Следовательно, четырёхугольник $AYOX$ вписанный.

Далее,

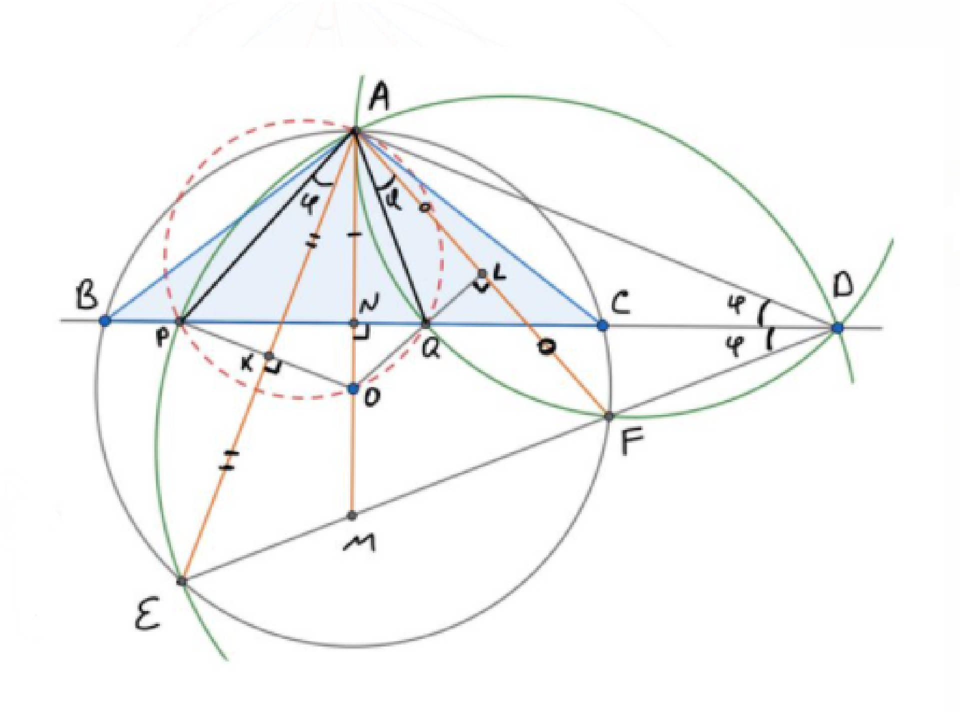
$$\angle AFE = \frac{\angle AOE}{2} = \frac{180° - 2\varphi}{2} = 90° - \varphi.$$

Значит, $\angle AQD = \angle AFD = 90° + \varphi$. Отсюда $\angle AXQ = 90° - \varphi$. Но $\angle AXQ = 90° - \varphi$. Поэтому $AX = AQ$, следовательно, точки X и Q симметричны относительно AO.

Аналогично точки Y и P симметричны относительно AO. Значит, четырёхугольники $APOQ$ и $AYOX$ симметричны относительно AO.

Поскольку четырёхугольник $AYOX$ вписанный, то и четырёхугольник $APOQ$ также вписанный. Что и требовалось доказать.

Второй способ. Из условия следует, что BC — серединный перпендикуляр к AN. Поэтому DB — биссектриса $\angle ADE$.



Таким образом, точки P и Q — середины дуг AE и AF соответственно окружностей ω_{ADE} и ω_{ADF}. Следовательно, точки P и Q лежат на серединных перпендикулярах к AE и AF соответственно, но на них лежит точка O. Значит, OP — серединный перпендикуляр к AE, и OQ — серединный перпендикуляр к AF.

Пусть K и L — середины AE и AF соответственно. Заметим, что $\angle PAE = \angle PDE = \varphi$, $\angle QAF = \angle QDF = \varphi$.

Значит, $\angle PAQ = \angle KAL = 180^\circ - \angle KOL$ (так как четырёхугольник $KALO$ вписанный).

Получаем, что $\angle PAQ + \angle POQ = 180^\circ$, следовательно, четырёхугольник $APOQ$ вписанный. Что и требовалось доказать.

Примерная схема оценивания

Первый способ.

1. Доказано, что четырёхугольник $XEMO$ (и/или $YFMO$) вписанный и/или $\angle AXO = \angle OME$ (и/или $\angle OMF = \angle OYA$) **(2 балла)**.
2. Доказано, что четырёхугольник $AXOY$ вписанный **(2 балла)**.
3. Доказано, что четырёхугольники $APOQ$ и $AYOX$ симметричны относительно AO **(2 балла)**.
4. Завершение доказательства **(1 балл)**.

Второй способ.

1. Доказано, что точки P и Q лежат на серединных перпендикулярах к AE и AF соответственно **(3 балла)**.
2. Показано, что OP — серединный перпендикуляр к AE, и OQ — серединный перпендикуляр к AF **(4 балла)**

   Примечание. Баллы пунктов 1 и 2 не суммируются.
3. Показано, что $\angle PAE = \angle PDE = \angle QAF = \angle QDF$ **(1 балл)**.
4. Показано, что $\angle PAQ + \angle POQ = 180^\circ$ **(2 балла)**

   Примечание. Баллы пунктов 3 и 4 не суммируются.
5. Завершение доказательства **(1 балл).**

Задача 9.6

Пусть p — простое число вида $(4k+1)$. Найти все такие натуральные числа a, b и c, которые удовлетворяют условиям

(a) *наибольший общий делитель чисел a, b и c равен 1;*

(b) *ab не делится на p;*

(c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{cp}=\frac{4}{p}$.

Ответ: $\varnothing$.

Решение. Пусть $a=dx$, $b=dy$, где $(x,y)=1$. Тогда в силу условия $(a,b,c)=1$, получаем, что $(c,d)=1$.

Из пункта (c) следует, что

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{4}{p}-\frac{1}{cp}=\frac{4c-1}{cp}.$$

С другой стороны

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{d(x+y)}{d^2xy}=\frac{x+y}{dxy}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{x+y}{dxy}=\frac{4c-1}{cp} \iff (x+y)cp=(4c-1)dxy.$$

Следовательно, $(4c-1)dxy \vdots c$. Отсюда, так как $(4c-1,c)=1$ и $(c,d)=1$, получаем, что $xy \vdots c$.

Также заметим, что $(x+y)cp \vdots xy$. Отсюда, поскольку $(xy,x+y)=1$ и $(p,xy)=1$, получаем $c \vdots xy$. Таким образом, $c=xy$.

Следовательно

$$(4xy-1)dxy=(x+y)xyp \iff (4xy-1)d=(x+y)p \iff$$
$$4dxy-xp-yp-d=0 \iff 16d^2xy-4dxp-4dyp=4d^2 \iff$$
$$16d^2xy-4dxp-4dyp+p^2=p^2+4d^2 \iff (4dx-p)(4dy-p)=p^2+(2d)^2.$$

Заметим, что $(4dx-p)$ можно представить в виде $4l+3$, значит, $(4dx-p)$ имеет хотя бы один простой делитель вида $4m+3$. Обозначим это простой делитель q. Тогда $p^2+(2d)^2$ делится на q. По теореме Жирара p и $2d$ делятся на q. Значит, $p=q$. Но тогда d делится на p, следовательно и $ab=d^2xy$ делится на p. Противоречие.

Таким образом, таких чисел a, b и c нет.

Примерная схема оценивания

1. Доказано, что xy делится на c **(2 балла)**.
2. Доказано, что c делится на xy **(2 балла)**.
3. Доказано, что $xy=c$ **(4 балла)**.

   Примечание. Баллы пункта 3 не суммируются с баллами пунктов 1 и 2.
4. Доказано, что $p^2+(2d)^2$ делится на простой делитель q вида $4m+3$ **(2 балла)**.
5. Завершение доказательства **(1 балл)**.