

Математика пәні бойынша
Республикалық оқушылар олимпиадасының
3-ші (облыстық) кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

9-сынып

1 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1. a , b және c – оң сандар болсын. Келесі теңсіздікті дәлелдеңіз

$$\sqrt{a^2 + 2b^2} + \sqrt{b^2 + 2c^2} + \sqrt{c^2 + 2a^2} \geq \sqrt{3}(a + b + c).$$

2. $\angle ABC = 120^\circ$ болатындай ABC үшбұрышы берілген. AP , BQ және CR – ABC үшбұрышының биссектрисалары I нүктесінде қиылысады. P нүктесінен CR түзуіне жүргізілген перпендикуляр AC қабырғасын S нүктесінде қияды; R нүктесінен AP түзуіне жүргізілген перпендикуляр AC қабырғасын T нүктесінде қияды.

(a) $\angle TIS = 90^\circ$;

(b) $QS = QT$.

болатынын дәлелдеңіз.

3. Келесі шарттарды қанағаттандыратын барлық натурал (x, y) жұптарын табыңыз

(a) $(x^3 + 1)$ y^2 -қа бөлінеді;;

(b) $(y^3 + 1)$ x^2 -қа бөлінеді.

3-й (областной) этап
Республиканской олимпиады школьников
по математике (2021-2022 учебный год)

9 класс

1 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. Пусть a , b и c – положительные целые числа. Докажите, что они удовлетворяют неравенству

$$\sqrt{a^2 + 2b^2} + \sqrt{b^2 + 2c^2} + \sqrt{c^2 + 2a^2} \geq \sqrt{3}(a + b + c).$$

2. Дан треугольник ABC , в котором $\angle ABC = 120^\circ$. Биссектрисы AP , BQ и CR треугольника ABC пересекаются в точке I . Перпендикуляр из точки P на CR пересекает AC в точке S ; перпендикуляр из точки R на AP пересекает AC в точке T . Докажите, что

(a) $\angle TIS = 90^\circ$;

(b) $QS = QT$.

3. Найдите все пары натуральных чисел (x, y) , которые удовлетворяют условиям

(a) $(x^3 + 1)$ делится на y^2 ;

(b) $(y^3 + 1)$ делится на x^2 .