Математика пәні бойынша
Республикалық оқушылар олимпиадасының
3-ші (облыстық) кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

11-сынып

1 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1. ABC сүйірбұрышты үшбұрышында AC қабырғасы ең үлкені. Центрі A радиусы AB болатын ω_1 шеңбері BC қабырғасын F нүктесінде қияды. Центрі C радиусы CB болатын ω_2 шеңбері AB қабырғасын E нүктесінде қияды. ω_1 және ω_2 шеңберлері екінші рет D нүктесінде қиылысады. B нүктесінен өтетін EF түзуіне параллель түзу ω_1 және ω_2 шеңберлерін екінші рет сәйкесінше G және T нүктелерінде қияды. $GT = DF + DE$ болатынын дәлелдеңіз.

2. Келесі шарттарды қанағаттандыратын барлық натурал (x, y) жұптарын табыңыз

(a) $(x^3 + 1)$ y^2-қа бөлінеді;;

(b) $(y^3 + 1)$ x^2-қа бөлінеді.

3. $a = BC$, $b = AC$ және $c = AB$ болатындай ABC үшбұрышы берілген. Дәлелдеңіз:

$$\left(\frac{r_a}{p}+1\right)\left(\frac{r_b}{p}+1\right)\left(\frac{r_c}{p}+1\right) < \frac{8R\sqrt{2}}{p},$$

мұндағы $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — жарты периметр, R — ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусы, ал r_a, r_b, r_c — сәйкесінше BC, AC және AB қабырғаларын жанайтын үшбұрыштың сыртына іштей сызылған шеңберлердің радиусы.

3-й (областной) этап
Республиканской олимпиады школьников
по математике (2021-2022 учебный год)

11 класс

1 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. В остроугольном треугольнике ABC сторона AC наибольшая. Окружность ω_1 с центром в точке A и радиусом AB пересекает сторону BC в точке F. Окружность ω_2 с центром в точке C и радиусом CB пересекает сторону AB в точке E. Окружности ω_1 и ω_2 вторично пересекаются в точке D. Прямая, параллельная EF и проходящая через B, вторично пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках G и T соответственно. Докажите, что $GT = DF + DE$.

2. Найти все пары натуральных чисел (x, y), которые удовлетворяют условиям

(a) $(x^3 + 1)$ делится на y^2;

(b) $(y^3 + 1)$ делится на x^2 .

3. Пусть дан треугольник ABC со сторонами $a = BC$, $b = AC$ и $c = AB$. Докажите, что

$$\left(\frac{r_a}{p}+1\right)\left(\frac{r_b}{p}+1\right)\left(\frac{r_c}{p}+1\right) < \frac{8R\sqrt{2}}{p},$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр, R — радиус описанной окружности треугольника ABC, а r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей этого треугольника, касающихся сторон BC, AC и AB соответсвенно.