Математика пәні бойынша
Республикалық оқушылар олимпиадасының
3-ші (облыстық) кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

11-сынып

1 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1. ABC сүйірбұрышты үшбұрышында AC қабырғасы ең үлкені. Центрі A радиусы AB болатын ω_1 шеңбері BC қабырғасын F нүктесінде қияды. Центрі C радиусы CB болатын ω_2 шеңбері AB қабырғасын E нүктесінде қияды. ω_1 және ω_2 шеңберлері екінші рет D нүктесінде қиылысады. B нүктесінен өтетін EF түзуіне параллель түзу ω_1 және ω_2 шеңберлерін екінші рет сәйкесінше G және T нүктелерінде қияды. $GT = DF + DE$ болатынын дәлелдеңіз.

2. Келесі шарттарды қанағаттандыратын барлық натурал (x, y) жұптарын табыңыз

(a) $(x^3 + 1)$ y^2-қа бөлінеді;

(b) $(y^3 + 1)$ x^2-қа бөлінеді.

3. $a = BC$, $b = AC$ және $c = AB$ болатындай ABC үшбұрышы берілген. Дәлелдеңіз:

$$\left(\frac{r_a}{p}+1\right)\left(\frac{r_b}{p}+1\right)\left(\frac{r_c}{p}+1\right) < \frac{8R\sqrt{2}}{p},$$

мұндағы $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — жарты периметр, R — ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусы, ал r_a, r_b, r_c — сәйкесінше BC, AC және AB қабырғаларын жанайтын үшбұрыштың сыртына іштей сызылған шеңберлердің радиусы.

3-й (областной) этап
Республиканской олимпиады школьников
по математике (2021-2022 учебный год)

11 класс

1 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. В остроугольном треугольнике ABC сторона AC наибольшая. Окружность ω_1 с центром в точке A и радиусом AB пересекает сторону BC в точке F. Окружность ω_2 с центром в точке C и радиусом CB пересекает сторону AB в точке E. Окружности ω_1 и ω_2 вторично пересекаются в точке D. Прямая, параллельная EF и проходящая через B, вторично пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках G и T соответственно. Докажите, что $GT = DF + DE$.

2. Найти все пары натуральных чисел (x, y), которые удовлетворяют условиям

(a) $(x^3 + 1)$ делится на y^2;

(b) $(y^3 + 1)$ делится на x^2 .

3. Пусть дан треугольник ABC со сторонами $a = BC$, $b = AC$ и $c = AB$. Докажите, что

$$\left(\frac{r_a}{p}+1\right)\left(\frac{r_b}{p}+1\right)\left(\frac{r_c}{p}+1\right) < \frac{8R\sqrt{2}}{p},$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр, R — радиус описанной окружности треугольника ABC, а r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей этого треугольника, касающихся сторон BC, AC и AB соответсвенно.

Решения и критерии оценивания 3-го (областного) этапа Республиканской олимпиады школьников по математике

2021-2022 учебный год

11 класс

День 1

Общие положения по проверке работ

1. Приведённые критерии оценивания являются приблизительными. Учащиеся (как и проверяющие), возможно, смогут найти и другие верные решения. Жюри имеет право вносить изменения в критерии, проголосовав за них коллегиально. Главное, чтобы все работы участников оценивались по одинаковым критериям.

2. Перед проверкой жюри следует внимательно изучить олимпиадные задания, их решения и критерии. Желательно прорешать задания самим для возможного поиска альтернативных решений.

3. По окончании проверки обязательно надо проводить разбор и апелляцию задач, притом разборы желательно делать до апелляции и при разборе рассказывать ученикам, за что снимались баллы, а за что добавлялись. Это значительно сократить число учеников желающих подать на апелляцию.

4. В целях более справедливой оценки желательно чтобы одну задачу проверял один человек (или, согласованно, одна группа). В конце, если позволяет время, то следует перепроверить горизонтально (один человек проверяет все задачи одного школьника).

5. Следует помнить, что олимпиадная работа – это не контрольная работа. При оценивании олимпиадных работ, в отличие от оценивания типовых заданий по математике, недопустимо снимать баллы за исправления в работе, за слишком длинное решение, или если решение школьника отличается от решения, приведенного в учебных пособиях.

6. Не следует слишком строго наказывать за технические ошибки или недостатки в решении: описки, легко устранимые арифметические ошибки, непринципиальные моменты в ходе решения, напримеручастник до конца не упростил ответ, не совсем строгий порядок изложение или пропуск очевидных моментов, не влияющих в целом на ход решения. В зависимости от серьёзности ошибки или недостатка снимается не более 2 баллов, в некоторых ситуациях вообще снимать не следует.

7. Внимательно проверяйте насколько соответствует решение критериям проверки. В особенности, если решение ученика неполное и / или альтернативное официальному. Важно понять, насколько участник продвинулся по критериям, какие случае идеи он предлагает и какие факты им получены или доказаны. В альтернативного решения желательно обсудить решения и критерии для этого решения коллегиально.

8. Однако текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен оцениваться в 0 баллов. Баллы за «старание участника» не выставляются, даже если участник исписал много страниц или построил «красивый» чертёж. Если участник «угадал» правильный ответ, не приводит никаких объяснений, как он его получил, то за это не следует давать баллов.

9. Часто на олимпиадах можно встретить так называемые «счётные решения», когда участник пытается решить задачу «в лоб», опираясь только на алгебраические операции, метод координат, векторный метод, теоремы косинусов, синусов, Чевы, Менелая и т. п., не применяя никакую идею, отличного от технического счёта. Обычно такие решения (если вообще возможно решить таким способом задачу) занимают много страниц текста. К таким «счётным» решениям по сложившейся многолетней традицииприменяется следующая схема оценивания:

   - если участник смог довести своё счётное решение до конца, то он получает полные **7 баллов**;
   - если участник не довёл своё «счётное» решение до конца (независимо насколько он продвинулся) и / или допустил вычислительную ошибку — **0 баллов**.

10. На математических олимпиадах преимущественно закрепилась наилучшим образом зарекомендовавшая себя 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице ниже. Таблица примерная, к каждой задаче следует подходить индивидуально.

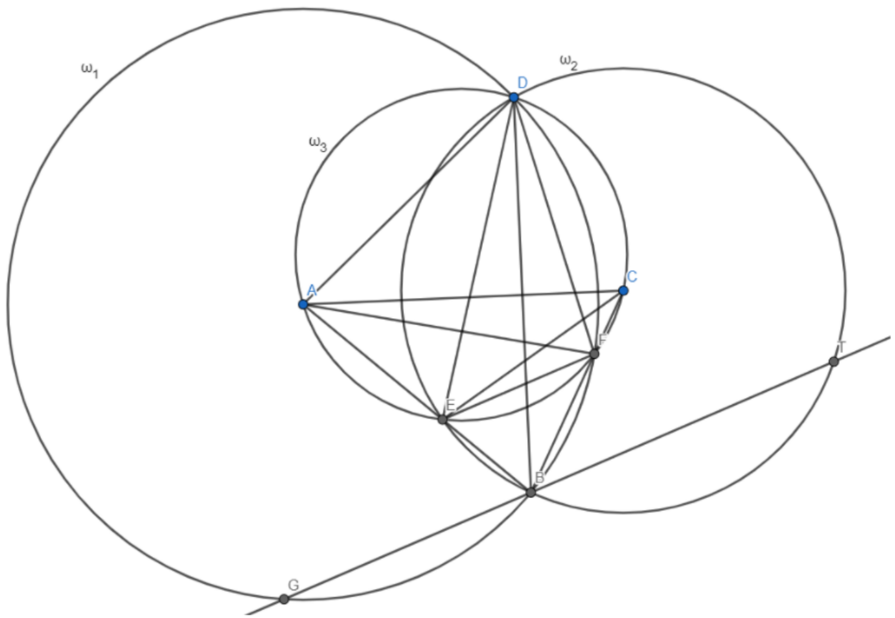
Примерные критерии оценивания задач

Баллы	**Отметка**	**Правильность (ошибочность) решения**
7	$+$	Полное верное решение.
6-7	$\underset{\cdot}{+}$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	$\underset{\bullet}{+}$ или $\underset{-}{+}$	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	$\pm$	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	$\dot{-}$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	$-$	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	$-$	Решение отсутствует.

Задача 11.1

В остроугольном треугольнике ABC сторона AC наибольшая. Окружность ω_1 с центром в точке A и радиусом AB пересекает сторону BC в точке F. Окружность ω_2 с центром в точке C и радиусом CB пересекает сторону AB в точке E. Окружности ω_1 и ω_2 вторично пересекаются в точке D. Прямая, параллельная EF и проходящая через B, вторично пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках G и T соответственно. Докажите, что $GT = DF + DE$.

Решение.



Треугольники AFB и CBE равнобедренные с одинаковым углом при основании ($\angle ABC$), значит, $\angle BAF = \angle BCE = \alpha$.

Следовательно, точки A, C, F и E лежат на одной окружности, назовем эту окружность ω_3.

$\angle FDB = \angle EDB = \frac{\alpha}{2}$ (опираются на дуги FB окружности ω_1 и EB окружности ω_2, центральные углы которых равны α).

Следовательно $\angle FDE = \alpha$. Значит, точка D лежит на окружности ω_3.

Прямя $EF||GB$, следовательно, $\angle EBG = \angle BEF = 180° - \angle AEF$. Так как точки A, D, F и E лежат на одной окружности, то $\angle ADF = 180° - \angle AEF$. Значит $\triangle ADF = \triangle ABG$, как равнобедренные треугольники с одинаковыми боковыми сторонами и углом при основании. Следовательно, $BG = DF$. Аналогично, $\triangle CBT = \triangle CED$, следовательно, $BT = DE$.

Значит $GT = DF + DE$. Что и требовалось доказать.

Примерная схема оценивания

1. Показано, что точки A, C, F и E лежат на одной окружности ω_3 **(1 балл)**.
2. Показано, что точка D лежит на окружности ω_3 **(2 балла)**.
3. Показано, что точки A, D, F и E лежат на одной окружности **(2 балла)**.
4. Показано, что $BG = DF$ и/или $BT = DE$ **(6 баллов)**.
5. Завершение доказательства **(1 балл)**.

   Примечание. Баллы пункта 4 не суммируются с баллами пунктов 1, 2 и 3.

Задача 11.2

Найти все пары натуральных чисел (x, y), которые удовлетворяют условиям

(a) (x^3+1) *делится на* y^2;

(b) (y^3+1) *делится на* x^2 .

Ответ: (1, 1), (3, 2), (2, 3).

Решение.

Случай 1. Пусть $x = y$, тогда из условия получаем, что

$$x^3+1 \mathrel{\vdots} x^2.$$

Так как x^3 делится на x^2, то из последнего утверждения получаем, что число 1 делится на x^2. Значит, $x = 1$.

Случай 2. Пусть $x > y$.
Так как y^3+1 делится на x^2, то

$$y^3+1 \geqslant x^2.$$

Так как x^3+1 делится на y^2 и y^3+1 делится на x^2, то

$$(x^3+1)(y^3+1) \mathrel{\vdots} x^2y^2.$$

Рассмотрим выражение

$$(x^3+1)(y^3+1) = x^3y^3 + x^3 + y^3 + 1.$$

Так как x^3y^3 делится на x^2y^2, то получаем, что

$$x^3+y^3+1 \mathrel{\vdots} x^2y^2.$$

Отсюда

$$2x^3 = x^3 + x^3 \geqslant x^3 + y^3 + 1 \geqslant x^2y^2 \iff 2x \geqslant y^2 \iff x \geqslant \frac{y^2}{2}.$$

Таким облазом, получаем

$$y^3+1 \geqslant x^2 \geqslant \left(\frac{y^2}{2}\right) = \frac{y^4}{4}.$$

Отсюда

$$y^3+1 \geqslant \frac{y^4}{4} \iff 4y^3+4 \geqslant y^4 \iff y^3(y-4) \leqslant 4.$$

Если $y \geqslant 5$, то $y^3(y-4) \geqslant 5^3(5-4) = 125 > 4$, что противоречит последнему неравенству. Значит, $y \in \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Если $y = 1$, то

$$y^3+1 = 1^3+1 = 2 \mathrel{\vdots} x^2.$$

Значит, $x = 1$, но $x > y$. Противоречие.

b) Если $y = 2$, то

$$y^3+1 = 2^3+1 = 9 \mathrel{\vdots} x^2.$$

Значит, $x = 1$ или $x = 3$. Так как $x > y$, то $x = 3$. То есть получаем пару $(3, 2)$. Заметим, что эта пара также удовлетворяет и втором условию. Действительно,

$$x^3+1 = 3^3+1 = 28 \mathrel{\vdots} y^2 = 4.$$

c) Если $y = 3$, то

$$y^3+1 = 3^3+1 = 28 \mathrel{\vdots} x^2.$$

Значит, $x = 1$ или $x = 2$. Так как $x > y$, то получаем противоречие.

d) Если $y = 4$, то

$$y^3+1 = 4^3+1 = 65 \mathrel{\vdots} x^2.$$

Значит, $x = 1$, но $x > y$. Противоречие.

Итак, в случае 2 получаем одну пару $(3, 2)$, удовлетворяющую условию задачи.

Случай 3. Пусть $y > x$.

Рассуждая аналогично случаю 2, получаем ещё одну пару решений: $(2, 3)$.

Таким образом, задача имеет три решения: $(1, 1)$, $(3, 2)$ и $(3, 2)$.

Примерная схема оценивания

1. Праильно рассмотрен случай, когда $x = y$ **(1 балл)**.

2. Доказано, что $x^3 + y^3 + 1$ делится на x^2y^2 **(1 балл)**.

3. Получено неравенство или иное условие, позволяющее разумно ограничить количество проверяемых значений (например, в решении получено неравенство $y^3(y - 4) \leqslant 4$, что ограничело значения y: $y \in \{1,2,3,4\}$). Количество оставшихся значений для проверки должно быть конечно и невелико (чтобы можно было проверить за ограниченное время) **(3 балла)**.

4. Перебор оставшихся вариантов с нахождением соответствующих пар решений **(2 балла)**.

   Примечание. Если в пункте 4 упущены какие-то случаи, штраф **1-2 балла** в зависимости от количества упузенных случаев.

5. Правильный ответ без обоснования **(0 баллов)**.

Задача 11.3

Пусть дан треугольник ABC со сторонами $a = BC$, $b = AC$ и $c = AB$. Докажите, что

$$\left(\frac{r_a}{p}+1\right)\left(\frac{r_b}{p}+1\right)\left(\frac{r_c}{p}+1\right) < \frac{8R\sqrt{2}}{p},$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр, R — радиус описанной окружности треугольника ABC, а r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей этого треугольника, касающихся сторон BC, AC и AB соответсвенно.

Решение.

Первый способ. Пусть $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — площадь треугольника ABC, r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности. Известно, что $r_a = \frac{S}{p-a}, r_b = \frac{S}{p-b}, r_c = \frac{S}{p-c}, r = \frac{S}{p}, R = \frac{abc}{4S}$. Тогда

$$\left(\frac{r_a}{p}+1\right)\left(\frac{r_b}{p}+1\right)\left(\frac{r_c}{p}+1\right) = \left(\frac{S}{p(p-a)}+1\right)\left(\frac{S}{p(p-b)}+1\right)\times$$
$$\times\left(\frac{S}{p(p-c)}+1\right) = \left(\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{\sqrt{p(p-a)}}+1\right)\left(\frac{\sqrt{(p-c)(p-a)}}{\sqrt{p(p-b)}}+1\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\sqrt{(p-a)(p-b)}}{\sqrt{p(p-c)}}+1\right) = \left(\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}+\sqrt{p(p-a)}}{\sqrt{p(p-a)}}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\sqrt{(p-c)(p-a)}+\sqrt{p(p-b)}}{\sqrt{p(p-b)}}\right)\left(\frac{\sqrt{(p-a)(p-b)}+\sqrt{p(p-c)}}{\sqrt{p(p-c)}}\right) =$$
$$= \frac{1}{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}\cdot\left(\sqrt{(p-b)(p-c)}+\sqrt{p(p-a)}\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{(p-c)(p-a)}+\sqrt{p(p-b)}\right)\left(\sqrt{(p-a)(p-b)}+\sqrt{p(p-c)}\right) =$$
$$= \frac{1}{pS}\cdot\left(\sqrt{(p-b)(p-c)}+\sqrt{p(p-a)}\right)\left(\sqrt{(p-c)(p-a)}+\sqrt{p(p-b)}\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{(p-a)(p-b)}+\sqrt{p(p-c)}\right).$$

Необходимо доказать, что

$$\frac{1}{pS}\cdot\left(\sqrt{(p-b)(p-c)}+\sqrt{p(p-a)}\right)\left(\sqrt{(p-c)(p-a)}+\sqrt{p(p-b)}\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{(p-a)(p-b)}+\sqrt{p(p-c)}\right) < \frac{8R\sqrt{2}}{p} = \frac{2abc\sqrt{2}}{pS}.$$

Умножив обе части неравенства на pS, получим

$$\left(\sqrt{(p-b)(p-c)}+\sqrt{p(p-a)}\right)\left(\sqrt{(p-c)(p-a)}+\sqrt{p(p-b)}\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{(p-a)(p-b)}+\sqrt{p(p-c)}\right) < 2abc\sqrt{2}.$$

Пусть $p-a = x$, $p-b = y$, $p-c = z$, тогда $x, y, z > 0$ и $p = x+y+z$. В результате наше неравенство перепишется в виде

$$\left(\sqrt{yz}+\sqrt{(x+y+z)x}\right)\left(\sqrt{zx}+\sqrt{(x+y+z)y}\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{xy}+\sqrt{(x+y+z)z}\right) < 2\sqrt{2}(y+z)(z+x)(x+y).$$

По неравенству между средним арифметическим и средним квадратичным

$$\frac{\sqrt{yz}+\sqrt{(x+y+z)x}}{2} \leqslant \sqrt{\frac{yz+(x+y+z)x}{2}} = \sqrt{\frac{(x+y)(x+z)}{2}}.$$

Отсюда

$$\sqrt{yz}+\sqrt{(x+y+z)x} \leqslant \sqrt{2(x+y)(x+z)}.$$

Аналогично получаем неравенства

$$\sqrt{zx}+\sqrt{(x+y+z)y} \leqslant \sqrt{2(y+z)(y+x)},$$
$$\sqrt{xy}+\sqrt{(x+y+z)z} \leqslant \sqrt{2(z+x)(z+y)}.$$

Таким образом, получаем

$$\left(\sqrt{yz}+\sqrt{(x+y+z)x}\right)\left(\sqrt{zx}+\sqrt{(x+y+z)y}\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{xy}+\sqrt{(x+y+z)z}\right)\leqslant\left(\sqrt{2(x+y)(x+z)}\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{2(y+z)(y+x)}\right)\left(\sqrt{2(z+x)(z+y)}\right)=$$
$$=2\sqrt{2}\sqrt{(y+z)^2(z+x)^2(x+y)^2}=$$
$$=2\sqrt{2}(y+z)(z+x)(x+y).$$

Равенство не может достигаться, так как иначе

$$yz=(x+y+z)x,$$
$$zx=(x+y+z)y,$$
$$xy=(x+y+z)z.$$

Просуммировав эти неравенства, получим

$$yz+zx+xy=(x+y+z)^2,$$
$$yz+zx+xy=x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy,$$
$$x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy=0.$$

Противоречие, так как положительное число $x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy$ равно 0.

Значит,

$$\left(\sqrt{yz}+\sqrt{(x+y+z)x}\right)\left(\sqrt{zx}+\sqrt{(x+y+z)y}\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{xy}+\sqrt{(x+y+z)z}\right)<2\sqrt{2}(y+z)(z+x)(x+y).$$

Что и требовалось доказать.

Второй способ. Заметим, что

$$\frac{r_a}{p}=\operatorname{tg}\frac{A}{2},\quad \frac{r_b}{p}=\operatorname{tg}\frac{B}{2},\quad \frac{r_c}{p}=\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Тогда

$$\left(\frac{r_a}{p}+1\right)\left(\frac{r_b}{p}+1\right)\left(\frac{r_c}{p}+1\right)=\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+1\right)\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+1\right)\left(\operatorname{tg}\frac{C}{2}+1\right)=$$
$$=\frac{\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)\left(\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\right)\left(\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$
$$=\frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Рассмотрим выражение

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{A-B-C}{2}+\cos\frac{A-B+C}{2}+\cos\frac{A+B-C}{2}+\cos\frac{A+B+C}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{B+C-A}{2}+\cos\frac{A+C-B}{2}+\cos\frac{A+B-C}{2}+\cos\frac{180^\circ}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{180^\circ-2A}{2}+\cos\frac{180^\circ-2B}{2}+\cos\frac{180^\circ-2C}{2}+\cos 90^\circ\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\cos(90^\circ-A)+\cos(90^\circ-B)+\cos(90^\circ-C)\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\sin A+\sin B+\sin C\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\right)=\frac{1}{4R}\cdot\frac{a+b+c}{2}=\frac{p}{4R}.$$

Итак, получаем

$$\left(\frac{r_a}{p}+1\right)\left(\frac{r_b}{p}+1\right)\left(\frac{r_c}{p}+1\right)=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)}{\frac{p}{4R}}=$$

$$=\frac{8R\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)}{p}\leqslant\frac{8R\sqrt{2}}{p}.$$

Равенство достигается, когда

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)=1,\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)=1,\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)=1,$$

то есть

$$\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}=0,\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}=0,\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}=0 \iff A=B=C=\frac{\pi}{2},$$

что невозможно в одном треугольнике. Значит,

$$\left(\frac{r_a}{p}+1\right)\left(\frac{r_b}{p}+1\right)\left(\frac{r_c}{p}+1\right)<\frac{8R\sqrt{2}}{p}.$$

Что и требовалось доказать.

Третий способ. Докажем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — корни многочлена*

$$f(x)=x^3+Kx^2+Lx+M.$$

Пусть $g(x)=x^2+k$. Рассмотрим многочлен

$$g(\lambda_1)g(\lambda_2)g(\lambda_3)=k^3+Ak^2+Bk+C,$$

где $A=K^2-2L$,$B=L^2-2KM$, $C=M^2$

Доказательство леммы 1. По теореме Виета для кубического многочлена $f(x)$

$$\begin{aligned}&\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-K,\\&\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1=L,\\&\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-M.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2-2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)=K^2-2L,$$
$$\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1^2=(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)^2-2\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)=$$
$$=L^2-2KM,$$
$$\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2=M^2.$$

Тогда

$$g(\lambda_1)g(\lambda_2)g(\lambda_3)=(\lambda_1^2+C)(\lambda_2^2+C)(\lambda_3^2+C)=$$
$$=C^3+(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)C^2+(\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1^2)C+\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2=$$
$$=C^3+(K^2-2L)C^2+(L^2-2KM)C+M^2.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Радиусы r_a, r_b и r_c вневписанных окружностей треугольника ABC являются корнями кубического многочлена*

$$x^3-(4R+r)x^2+p^2x-p^2r,$$

где p — полупериметр, R — радиус описанной окружности, r

Доказательство леммы 2. Известно, что

$$r_a=\frac{S}{p-a},r_b=\frac{S}{p-b},r_c=\frac{S}{p-c},r=\frac{S}{p},R=\frac{abc}{4S},$$

где $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — площадь треугольника ABC.

Пусть $f(x)=x^3+Kx^2+Lx+M$ — многочлен с корнями r_a, r_b и r_c.

Тогда по теореме Виета

$$K=-(r_a+r_b+r_c)=-(r_a+r_b+r_c)+r-r=$$
$$=-\left(\frac{S}{p-a}+\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}\right)+\frac{S}{p}-r=$$
$$=-\frac{S((p-b)(p-c)+(p-a)(p-c)+(p-a)(p-b)))}{(p-a)(p-b)(p-c)}+\frac{S}{p}-r=$$
$$=-\frac{S(p(p-b)(p-c)+p(p-a)(p-c)+p(p-a)(p-b))}{p(p-a)(p-b)(p-c)}+\frac{S}{p}-r=$$
$$=-\frac{S(p(p-b)(p-c)+p(p-a)(2p-b-c))}{p(p-a)(p-b)(p-c)}+\frac{S}{p}-r=$$
$$=-\frac{S(p(p-b)(p-c)+pa(p-a))}{p(p-a)(p-b)(p-c)}+\frac{S}{p}-r=$$
$$=-\frac{S((p-a)(p-b)(p-c)+a(p-b)(p-c)+ap(p-a))}{p(p-a)(p-b)(p-c)}+\frac{S}{p}-r=$$

$$=-\frac{S}{p}-\frac{Sa(p^2-pb-pc+bc+p^2-pa)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}+\frac{S}{p}-r=$$
$$=-\frac{Sa(2p^2-p(a+b+c)+bc)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}-r=$$
$$=-\frac{Sa(2p^2-2p^2+bc)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}-r=$$
$$=-\frac{Sabc}{S^2}-r=-\frac{4S^2R}{S^2}-r=-(4R+r);$$

$$L=r_ar_b+r_cr_b+r_cr_a=\frac{S^2}{(p-a)(p-b)}+\frac{S^2}{(p-b)(p-c)}+\frac{S^2}{(p-c)(p-a)}=$$
$$=\frac{S^2(p-c+p-a+p-b)}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{p^2(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)}=p^2;$$

$$M=-r_ar_br_c=-\frac{S}{p-a}\cdot\frac{S}{p-b}\cdot\frac{S}{p-c}=-\frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}=$$
$$=-\frac{Sp(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)}=Sp=-p^2r.$$

Лемма 2 доказана.

Рассмотрим многочлены

$$f(x)=x^3-(4R+r)x^2+p^2x-p^2r$$

и

$$g(x)=x^2+p^2$$

При этом по лемме 2 радиусы r_a, r_b и r_c вневписанных окружностей треугольника ABC являются корнями многочлена $f(x)$.

Обозначим

$$K=-(4R+r),\quad L=p^2,\quad M=-p^2r.$$

Тогда по лемме 1

$$\left(r_a^2+p^2\right)\left(r_b^2+p^2\right)\left(r_c^2+p^2\right)=g(r_a)g(r_b)g(r_c)=$$
$$=(p^2)^3+A(p^2)^2+Bp^2+C=p^6+Ap^4+Bp^2+C.$$

Здесь

$$A=K^2-2L=(4R+r)^2-2p^2,$$
$$B=L^2-2KM=p^4-2(4R+r)p^2r,$$
$$C=M^2=p^4r^2.$$

Таким образом,

$$\left(r_a^2+p^2\right)\left(r_b^2+p^2\right)\left(r_c^2+p^2\right)=$$
$$=p^6+\left((4R+r)^2-2p^2\right)p^4+\left(p^4-2(4R+r)p^2r\right)p^2+p^4r^2=$$
$$=p^6+16p^4R^2+8p^4Rr+p^4r^2-p^6-8p^4Rr-p^4r^2=16p^4R^2.$$

Итак,

$$\left(r_a^2+p^2\right)\left(r_b^2+p^2\right)\left(r_c^2+p^2\right)=16p^4R^2.$$

Разделив последнее равенство на p^6, получим

$$\left(\frac{r_a^2}{p^2}+1\right)\left(\frac{r_b^2}{p^2}+1\right)\left(\frac{r_c^2}{p^2}+1\right)=\frac{16R^2}{p^2}.$$

По неравенсту между средним арифметическим и средним кавдратичным получим

$$\frac{r_a}{p}+1\leqslant 2\sqrt{\frac{\frac{r_a^2}{p^2}+1}{2}}=\sqrt{2\left(\frac{r_a^2}{p^2}+1\right)},$$

$$\frac{r_b}{p}+1\leqslant\sqrt{2\left(\frac{r_b^2}{p^2}+1\right)},\ \frac{r_c}{p}+1\leqslant\sqrt{2\left(\frac{r_c^2}{p^2}+1\right)}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{r_a}{p}+1\right)\left(\frac{r_b}{p}+1\right)\left(\frac{r_c}{p}+1\right)\leqslant\sqrt{8\left(\frac{r_a^2}{p^2}+1\right)\left(\frac{r_b^2}{p^2}+1\right)\left(\frac{r_c^2}{p^2}+1\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{128R^2}{p^2}}=\sqrt{\frac{64\cdot 2R^2}{p^2}}=\frac{8R\sqrt{2}}{p}.$$

Равенство возможно тогда, и только тогда, когда

$$\frac{r_a}{p}=\frac{r_b}{p}=\frac{r_c}{p}=1\iff\frac{S}{p(p-a)}=\frac{S}{p(p-b)}=\frac{S}{p(p-c)}=1\iff$$

$$\iff\frac{r}{p-a}=\frac{r}{p-b}=\frac{r}{p-c}=1\iff a=b=c=p-r,$$

то есть когда треугольник ABC равносторонний.

Но для равностороннего треугольника $p=\dfrac{3a}{2}, r=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, и, значит,

$$p-r=\frac{3a}{2}-\frac{a\sqrt{3}}{6}\neq a.$$

Противоречие. Значит, равенство невозможно, следовательно,

$$\left(\frac{r_a}{p}+1\right)\left(\frac{r_b}{p}+1\right)\left(\frac{r_c}{p}+1\right)<\frac{8R\sqrt{2}}{p}.$$

Что и требовалось доказать.

Примерная схема оценивания

Первый способ.

1. Неравенство сведено к неравенству

$$\left(\sqrt{(p-b)(p-c)}+\sqrt{p(p-a)}\right)\left(\sqrt{(p-c)(p-a)}+\sqrt{p(p-b)}\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{(p-a)(p-b)}+\sqrt{p(p-c)}\right)<2abc\sqrt{2}.$$

(3 балла)

2. Сделана замена, задача приведена к доказательству неравенства

$$\left(\sqrt{yz}+\sqrt{(x+y+z)x}\right)\left(\sqrt{zx}+\sqrt{(x+y+z)y}\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{xy}+\sqrt{(x+y+z)z}\right)<2\sqrt{2}(y+z)(z+x)(x+y).$$

(1 балл)

3. Правильно применено неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным **(1 балл)**

4. Доказано нестрогое неравенство

$$\left(\sqrt{yz}+\sqrt{(x+y+z)x}\right)\left(\sqrt{zx}+\sqrt{(x+y+z)y}\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{xy}+\sqrt{(x+y+z)z}\right)\leqslant 2\sqrt{2}(y+z)(z+x)(x+y).$$

(1 балл)

5. Показано, что равенство не может достигаться **(1 балл)**

Второй способ.

1. Показно, что

$$\left(\frac{r_a}{p}+1\right)\left(\frac{r_b}{p}+1\right)\left(\frac{r_c}{p}+1\right)=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

   (2 балла)

2. Получено равенство

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{4R}.$$

   (2 балла)

3. Показано, что

$$\left(\frac{r_a}{p}+1\right)\left(\frac{r_b}{p}+1\right)\left(\frac{r_c}{p}+1\right)=$$

$$=\frac{8R\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)}{p}\leqslant\frac{8R\sqrt{2}}{p}.$$

   (5 баллов)

4. Отсюда доказано нестрогое неравенство:

$$\left(\frac{r_a}{p}+1\right)\left(\frac{r_b}{p}+1\right)\left(\frac{r_c}{p}+1\right)\leqslant\frac{8R\sqrt{2}}{p}.$$

   (1 балл)

5. Показано, что равенство не может достигаться **(1 балл)**

   Примечание. Баллы пункта 3 не суммируются с баллами пунктов 1, 2.

Третий способ.

1. Доказана лемма 1 **(1 балл)**.

2. Доказана лемма 2 **(3 балла)**.

3. Получено равенство $\left(r_a^2+p^2\right)\left(r_b^2+p^2\right)\left(r_c^2+p^2\right)=16p^4R^2$ или эквивалентное ему **(5 баллов)**.

4. Отсюда доказано нестрогое неравенство:

$$\left(\frac{r_a}{p}+1\right)\left(\frac{r_b}{p}+1\right)\left(\frac{r_c}{p}+1\right)\leqslant\frac{8R\sqrt{2}}{p}.$$

   (1 балл)

5. Показано, что равенство не может достигаться **(1 балл)**.

   Примечание. Баллы пункта 3 не суммируются с баллами пунктов 1, 2.