

Математика пәні бойынша  
Республикалық оқушылар олимпиадасының  
3-ші (облыстық) кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

10-сынып

2 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.  
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

4. Түзудің бойынан  $n$  қара түсті нүктелер белгіленген. Арман белгіленген нүктелердің бірнешеуін таңдап (кем дегенде біреу немесе барлығы болуыда мүмкін), ал қалғандарын өшіріп тастайды. Ол қалған нүктелердің ішіндегі ең сол жағындағы нүктені қызыл түске бояйды, ал қалған өшпеген нүктелерді (егер олар болса) ол не көк не жасыл түске бояйды. Арман осылай әр түрлі 3280 тәсілмен істеп шығуға болатынын есептеді. Түзудің бойынан басында қанша қара түсті нүктелер белгіленген?

5.  $AB = AC$  және  $\angle BAC > 90^\circ$  болатындай  $ABC$  үшбұрышы берілген.  $O$  нүктесі  $ABC$  үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрі.  $M$  нүктесі  $A$  нүктесіне  $BC$  қабырғасына қатысты симметриялы нүкте.  $BC$  қабырғасының  $C$  нүктесінен созындысынан  $D$  нүктесі алынды.  $DM$  түзуі  $ABC$  үшбұрышына сырттай сызылған шеңберді  $E$  және  $F$  нүктелерінде қияды.  $ADE$  және  $ADF$  үшбұрыштарына сырттай сызылаған шеңберлері  $BC$  қабырғасын  $P$  және  $Q$  нүктесінде қияды.  $DA$  түзуі  $POQ$  үшбұрышына сырттай сызылған шеңберді жанайтынын дәлелдеңіз.

6.  $p = (4k + 1)$  түріндегі жай сан болсын. Келесі шарттарды қанағаттандыратындай барлық натурал  $a$ ,  $b$  және  $c$  сандарын табыңыз:

(a)  $a$ ,  $b$  және  $c$  сандарының ең үлкен ортақ бөлгіші 1-ге тең;

(b)  $ab$  саны  $p$ -ға бөлінбейді;

(c)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{cp} = \frac{4}{p}$ .

3-й (областной) этап  
Республиканской олимпиады школьников  
по математике (2021-2022 учебный год)

10 класс

2 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.  
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

4. На прямой отмечены  $n$  чёрных точек. Арман выбирает несколько из отмеченных точек (хотя бы одну, возможно, что все), остальные стирает. Самую левую из оставшихся точек он красит в красный цвет, остальные не стёртые точки (если такие есть) он красит либо в синий, либо в зелёный цвет. Арман подсчитал, что он может это сделать 3280 различными способами. Сколько чёрных точек было отмечено на прямой изначально?

5. Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $AB = AC$  и  $\angle BAC > 90^\circ$ . Точка  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Точка  $M$  симметрична точке  $A$  относительно стороны  $BC$ . На продолжении стороны  $BC$  за точку  $C$  выбрана точка  $D$ . Прямая  $DM$  пересекает окружность, описанную около треугольника  $ABC$ , в точках  $E$  и  $F$ . Окружности, описанные около треугольников  $ADE$  и  $ADF$  пересекают сторону  $BC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Докажите, что прямая  $DA$  касается окружности, описанной около треугольника  $POQ$ .

6. Пусть  $p$  — простое число вида  $(4k + 1)$ . Найти все такие натуральные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , которые удовлетворяют условиям

(a) наибольший общий делитель чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  равен 1;

(b)  $ab$  не делится на  $p$ ;

(c)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{cp} = \frac{4}{p}$ .