Математика пәні бойынша
Республикалық оқушылар олимпиадасының
3-ші (облыстық) кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

10-сынып

2 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

4. Түзудің бойынан n қара түсті нүктелер белгіленген. Арман белгіленген нүктелердің бірнешеуін таңдап (кем дегенде біреу немесе барлығы болуыда мүмкін), ал қалғандарын өшіріп тастайды. Ол қалған нүктелердің ішіндегі ең сол жағындағы нүктені қызыл түске бояйды, ал қалған өшпеген нүктелерді (егер олар болса) ол не көк не жасыл түске бояйды. Арман осылай әр түрлі 3280 тәсілмен істеп шығуға болатынын есептеді. Түзудің бойынан басында қанша қара түсті нүктелер белгіленген?

5. $AB = AC$ және $\angle BAC > 90°$ болатындай ABC үшбұрышы берілген. O нүктесі ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрі. M нүктесі A нүктесіне BC қабырғасына қатысты симметриялы нүкте. BC қабырғасының C нүктесінен созындысынан D нүктесі алынды. DM түзуі ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңберді E және F нүктелерінде қияды. ADE және ADF үшбұрыштарына сырттай сызылаған шеңберлері BC қабырғасын P және Q нүктесінде қияды. DA түзуі POQ үшбұрышына сырттай сызылған шеңберді жанайтынын дәлелдеңіз.

6. p — $(4k+1)$ түріндегі жай сан болсын. Келесі шарттарды қанағаттандыратындай барлық натурал a, b және с сандарын табыңыз:

(a) a, b және с сандарының ең үлкен ортақ бөлгіші 1-ге тең;

(b) ab саны p-ға бөлінбейді;

(c) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{cp} = \dfrac{4}{p}$.

3-й (областной) этап
Республиканской олимпиады школьников
по математике (2021-2022 учебный год)

10 класс

2 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

4. На прямой отмечены n чёрных точек. Арман выбирает несколько из отмеченых точек (хотя бы одну, возможно, что все), остальные стирает. Самую левую из оставшихся точек он красит в красный цвет, остальные не стёртые точки (если такие есть) он красит либо в синий, либо в зелёный цвет. Арман подсчитал, что он может это сделать 3280 различными способами. Сколько чёрных точек было отмечено на прямой изначально?

5. Дан треугольник ABC, в котором $AB = AC$ и $\angle BAC > 90°$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Точка M симметрична точке A относительно стороны BC. На продолжении стороны BC за точку C выбрана точка D. Прямая DM пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точках E и F. Окружности, описанные около треугольников ADE и ADF пересекают сторону BC в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямая DA касается окружности, описанной около треугольника POQ.

6. Пусть p — простое число вида $(4k+1)$. Найти все такие натуральные числа a, b и c, которые удовлетворяют условиям

(a) наибольший общий делитель чисел a, b и c равен 1;

(b) ab не делится на p;

(c) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{cp} = \dfrac{4}{p}$.

Решения и критерии оценивания 3-го (областного) этапа Республиканской олимпиады школьников по математике

2021-2022 учебный год

10 класс

День 2

Общие положения по проверке работ

1. Приведённые критерии оценивания являются приблизительными. Учащиеся (как и проверяющие), возможно, смогут найти и другие верные решения. Жюри имеет право вносить изменения в критерии, проголосовав за них коллегиально. Главное, чтобы все работы участников оценивались по одинаковым критериям.

2. Перед проверкой жюри следует внимательно изучить олимпиадные задания, их решения и критерии. Желательно прорешать задания самим для возможного поиска альтернативных решений.

3. По окончании проверки обязательно надо проводить разбор и апелляцию задач, притом разборы желательно делать до апелляции и при разборе рассказывать ученикам, за что снимались баллы, а за что добавлялись. Это значительно сократить число учеников желающих подать на апелляцию.

4. В целях более справедливой оценки желательно чтобы одну задачу проверял один человек (или, согласованно, одна группа). В конце, если позволяет время, то следует перепроверить горизонтально (один человек проверяет все задачи одного школьника).

5. Следует помнить, что олимпиадная работа – это не контрольная работа. При оценивании олимпиадных работ, в отличие от оценивания типовых заданий по математике, недопустимо снимать баллы за исправления в работе, за слишком длинное решение, или если решение школьника отличается от решения, приведенного в учебных пособиях.

6. Не следует слишком строго наказывать за технические ошибки или недостатки в решении: описки, легко устранимые арифметические ошибки, непринципиальные моменты в ходе решения, напримеручастник до конца не упростил ответ, не совсем строгий порядок изложение или пропуск очевидных моментов, не влияющих в целом на ход решения. В зависимости от серьёзности ошибки или недостатка снимается не более 2 баллов, в некоторых ситуациях вообще снимать не следует.

7. Внимательно проверяйте насколько соответствует решение критериям проверки. В особенности, если решение ученика неполное и / или альтернативное официальному. Важно понять, насколько участник продвинулся по критериям, какие случае идеи он предлагает и какие факты им получены или доказаны. В альтернативного решения желательно обсудить решения и критерии для этого решения коллегиально.

8. Однако текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен оцениваться в 0 баллов. Баллы за «старание участника» не выставляются, даже если участник исписал много страниц или построил «красивый» чертёж. Если участник «угадал» правильный ответ, не приводит никаких объяснений, как он его получил, то за это не следует давать баллов.

9. Часто на олимпиадах можно встретить так называемые «счётные решения», когда участник пытается решить задачу «в лоб», опираясь только на алгебраические операции, метод координат, векторный метод, теоремы косинусов, синусов, Чевы, Менелая и т. п., не применяя никакую идею, отличного от технического счёта. Обычно такие решения (если вообще возможно решить таким способом задачу) занимают много страниц текста. К таким «счётным» решениям по сложившейся многолетней традицииприменяется следующая схема оценивания:

   - если участник смог довести своё счётное решение до конца, то он получает полные **7 баллов**;
   - если участник не довёл своё «счётное» решение до конца (независимо насколько он продвинулся) и / или допустил вычислительную ошибку — **0 баллов**.

10. На математических олимпиадах преимущественно закрепилась наилучшим образом зарекомендовавшая себя 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице ниже. Таблица примерная, к каждой задаче следует подходить индивидуально.

Примерные критерии оценивания задач

Баллы	**Отметка**	**Правильность (ошибочность) решения**
7	$+$	Полное верное решение.
6-7	$\underset{\cdot}{+}$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	$\underset{\bullet}{+}$ или $\underset{-}{+}$	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	$\pm$	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	$\dot{-}$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	$-$	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	$-$	Решение отсутствует.

Задача 10.4

На прямой отмечены n чёрных точек. Арман выбирает несколько из отмеченых точек (хотя бы одну, возможно, что все), остальные стирает. Самую левую из оставшихся точек он красит в красный цвет, остальные не стёртые точки (если такие есть) он красит либо в синий, либо в зелёный цвет. Арман подсчитал, что он может это сделать 3280 различными способами. Сколько чёрных точек было отмечено на прямой изначально?

Ответ: 8.

Решение.

Первый способ. Разобьём задачу на случаи.

Случай 1. Пусть Арман выбрал одну точку. Это он мог сделать C_n^1 способами. Так как точка одна, то он красит её в красный цвет. Таким образом, в этом случае количество всевозможных вариантов равно C_n^1.

Случай 2. Пусть Арман выбрал две точки. Это можно сделать C_n^2 способами. Самую левую он красит в красный цвет, а оставщуюся точку он может покрасить двумя способами (в синий или зелёный цвет). Таким образом, в этом случае количество вариантов равно $2 \cdot C_n^2$.

Случай 3. Три точки Арман может выбрать C_n^3 способами. Самую левую он, как обычно, красит в красный цвет, а каждую из двух оставшихся точек он может покрасить двумя способами (в синий или зелёный цвет). Всего количество вариантов равно $2 \cdot 2 \cdot C_n^3 = 2^2 \cdot C_n^3$.

. . . .

Случай k. В случае, когда Арман выбирает k точек. Это можно сделать C_n^k способами. Левую он красит в красный цвет, а каждую из $(k-1)$ оставшихсяся точек он может покрасить двумя способами (в синий или зелёный цвет). Таким образом, в этом случае получем $2^{k-1}C_n^k$ способов.

. . . .

Случай n. Пусть Арман выбрал все точки. В этом случае аналогично получаем, что количество способов равно $2^{n-1}C_n^n$.

Следовательно, общее количество возможных способов равно

$$N = C_n^1 + 2C_n^2 + 2^2 \cdot C_n^3 + \cdots 2^{n-1}C_n^n = 3280.$$

Отсюда

$$2N + 1 = 1 + 2C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + 2^3 \cdot C_n^3 + \cdots 2^n C_n^n.$$

По формуле бинома Ньютона

$$2N + 1 = (1+2)^n = 3^n.$$

По условию $N = 3280$, значит,

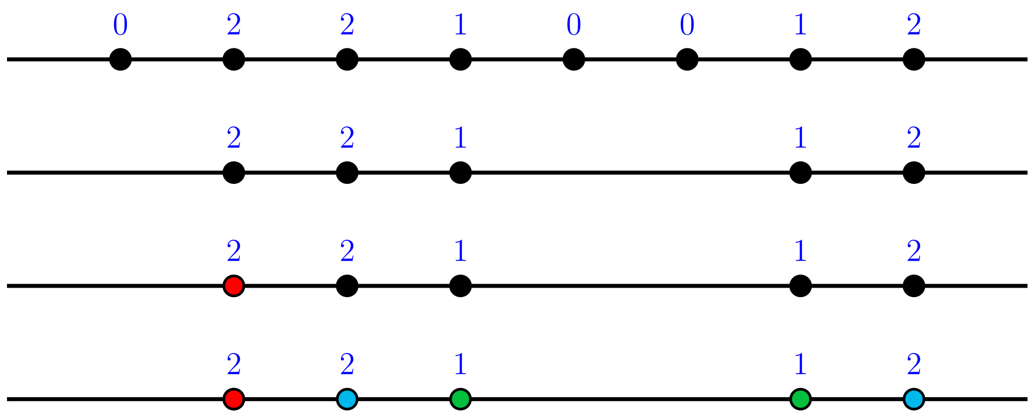
$$3^n = 2 \cdot 3280 + 1 = 6561 = 3^8.$$

Следовательно, $n = 8$.

Второй способ. Присвоим каждой точке одно из чисел 0, 1 или 2. Это можно сделать 3^n способами. Сотрём все точки, помеченные числом 0. Так как нельзя стереть все точки, Арман должен оставить хотя бы одну, то исключим случай, когда все точки помечены числом 0. Остаётся $3^n - 1$ вариантов.

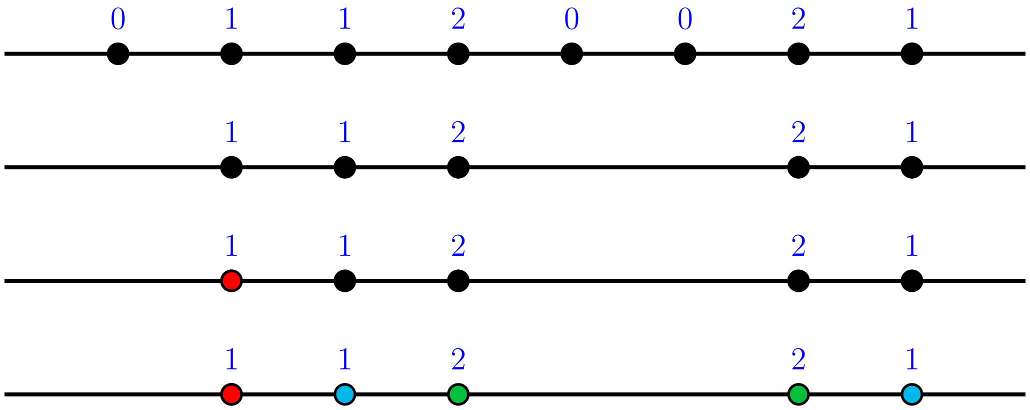
Далее посмотрим на самую левую точку. Покрасим её (как сказано в условии) в красный цвет. Остальные точки, если таковые остались, будем красить по следующей схеме: если точка помечена тем же числом, что и крайне левая, то красим эту точку в синий цвет, в противном случае в зелёный.

Ниже приведён пример, как работает алгоритм.



Таким образом, количество способов для Армана выбрать точки, а затем раскрасить указанным способом, равно количеству способов пронумеровать точки числами 0, 1 и 2 (исключая случай всех нулей) с единственной поправкой.

Заметим, что если заменить 1 на 2, а 2 на 1, то в результате получаем тот же выбор и тот же способ раскраски точек. Продемонстрируем это на предыдущем примере.



Поэтому каждому выбору и точек и последующей раскраске соответствует два способа нумерации точек. Поэтому найденное колисетво способов нумерации нужно разделить на 2.

Итак, количество способов для Армана выбрать и раскрасить точки равно

$$N = \frac{3^n - 1}{2}.$$

С другой стороны это количество способов равно 3280. То есть

$$N = \frac{3^n - 1}{2} = 3280 \iff$$
$$3^n = 2 \cdot 3280 + 1 = 6561 = 3^8.$$

Следовательно, $n = 8$.

Примерная схема оценивания

Первый способ.

1. Показано, что в k-м случае количество способов равно $2^{k-1}C_n^k$ **(2 балла)**.
2. Показано, что $N = C_n^1 + 2C_n^2 + 2^2 \cdot C_n^3 + \cdots 2^{n-1}C_n^n$ **(4 балла)**.
3. Показано, что $2N + 1 = (1+2)^n = 3^n$ **(6 баллов)**.

   Примечание. Баллы пунктов 1, 2 и 3 не суммируются.
4. Получен правильный ответ **(1 балл)**.
5. Правильный ответ без обоснования **(0 баллов)**.

Второй способ.

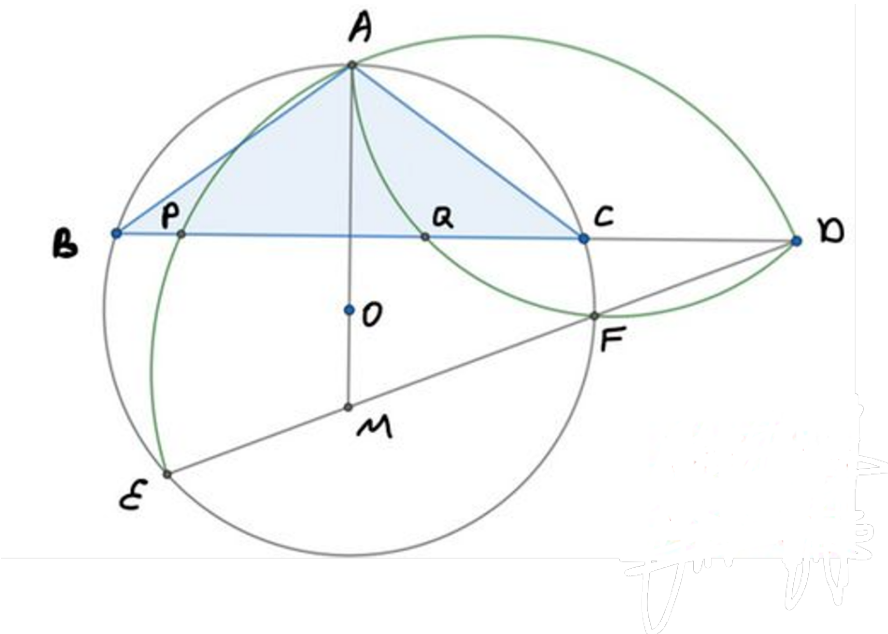
1. Кодировка **(2 балла)**.
2. Показано, что число способо закодировать равно $3^n - 1$ **(4 балла)**.
3. Показано, что $N = \dfrac{3^n - 1}{2}$ **(6 баллов)**.

   Примечание. Баллы пунктов 1, 2 и 3 не суммируются.
4. Получен правильный ответ **(1 балл)**.
5. Правильный ответ без обоснования **(0 баллов)**.

Задача 10.5

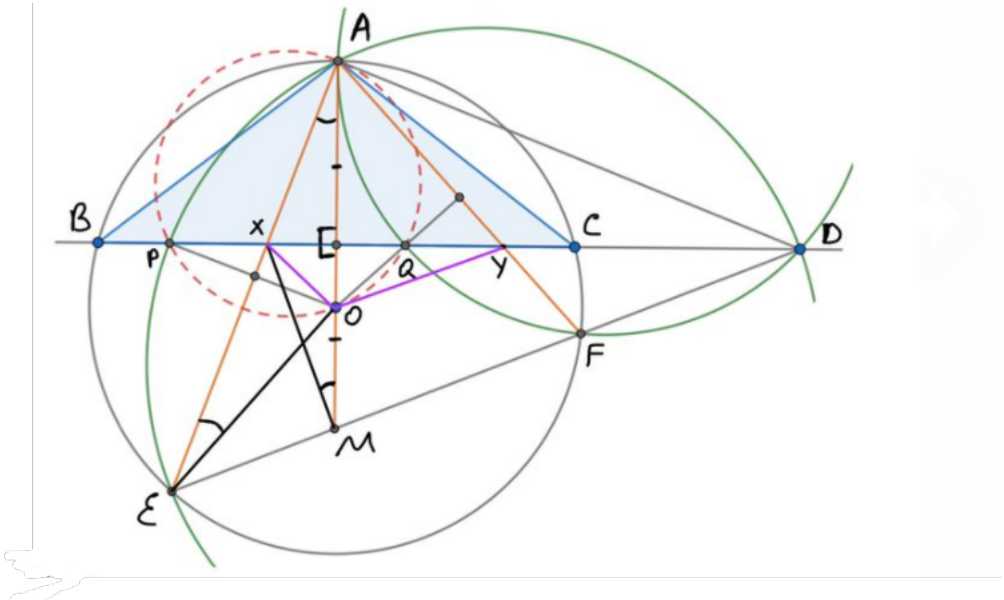
Дан треугольник ABC, в котором $AB = AC$ и $\angle BAC > 90°$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Точка M симметрична точке A относительно стороны BC. На продолжении стороны BC за точку C выбрана точка D. Прямая DM пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точках E и F. Окружности, описанные около треугольников ADE и ADF пересекают сторону BC в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямая DA касается окружности, описанной около треугольника POQ.

Решение.



Первый способ. Докажем, что точка A принадлежит окружности ω, описанной около треугольника POQ.

Проведём отрезки AE и AF. Пусть AE и AF пересекают BC в точках X и Y соответственно.



Так как $OA = OE$, то $\angle OAE = \angle OEA = \varphi$.

Точки A и M симметричны относительно BC, следовательно, $AX = XM$. Отсюда $\angle XMA = \angle XAM = \varphi$. Таким образом, четырёхугольник $XEMO$ вписанный и $\angle AXO = \angle OME$.

Аналогично получаем, что четырёхугольник $YFMO$ вписанный и $\angle OMF = \angle OYA$.

Значит,

$$\angle AXO + \angle OYA = \angle OME + \angle OMF = 180°.$$

Следовательно, четырёхугольник $AXOY$ вписанный.

Далее,

$$\angle AFE = \frac{\angle AOE}{2} = \frac{180° - 2\varphi}{2} = 90° - \varphi.$$

Значит, $\angle AQD = \angle AFD = 90° + \varphi$. Отсюда $\angle AXQ = 90° - \varphi$. Но $\angle AXQ = 90° - \varphi$. Поэтому $AX = AQ$, следовательно, точки X и Q симметричны относительно AO.

Аналогично точки Y и P симметричны относительно AO. Значит, четырёхугольники $APOQ$ и $AYOX$ симметричны относительно AO.

Поскольку четырёхугольник $AXOY$ вписанный, то и четырёхугольник $APOQ$ также вписанный.

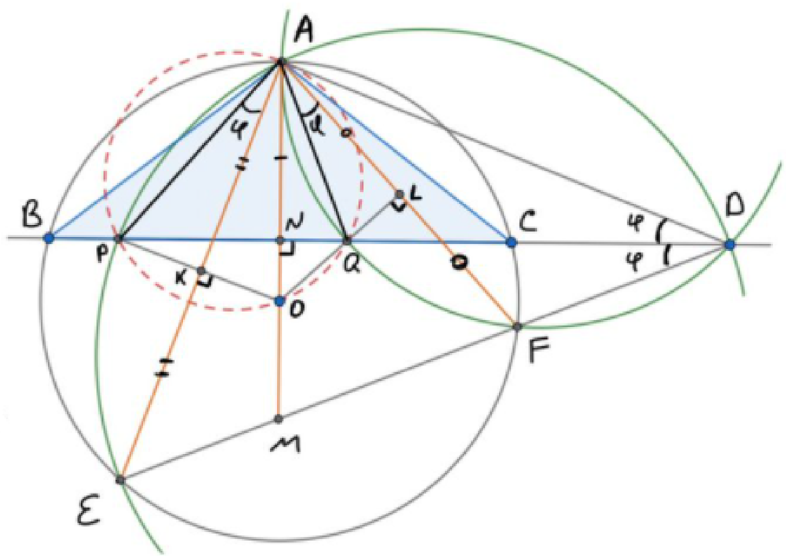
Теперь докажем, что DA касается окружностти $APOQ$. Действительно,

$$\angle DAO = \angle DMO \stackrel{a}{=} \angle OYA \stackrel{b}{=} \angle OPA.$$

[a]так как четырёхугольник $YFMO$ вписанный
[b]из симметрии относительно AO

По теореме про угол между хордой и касательной прямая DA касается окружности ω. Что и требовалось доказать.

Второй способ. Из условия следует, что BC — серединный перпендикуляр к AN. Поэтому DB — биссектриса $\angle ADE$.



Таким образом, точки P и Q — середины дуг AE и AF соответственно окружностей ω_{ADE} и ω_{ADF}. Следовательно, точки P и Q лежат на серединных перпендикулярах к AE и AF соответственно, но на них лежит точка O. Значит, OP — серединный перпендикуляр к AE, и OQ — серединный перпендикуляр к AF.

Пусть K и L — середины AE и AF соответственно. Заметим, что $\angle PAE = \angle PDE = \varphi$, $\angle QAF = \angle QDF = \varphi$.

Значит, $\angle PAQ = \angle KAL = 180^\circ - \angle KOL$ (так как четырёхугольник $KALO$ вписанный). Получаем, что $\angle PAQ + \angle POQ = 180^\circ$, следовательно, четырёхугольник $APOQ$ вписанный.

Теперь докажем, что DA касается окружностти $APOQ$. Действительно,

$$\angle DAO = \angle DMA \stackrel{a}{=} \angle LNA \stackrel{b}{=} \angle AQL \stackrel{c}{=} \angle APO.$$

[a]LN — средняя линия $\triangle AMF$
[b]так как четырёхугольник $ANQL$ вписанный
[c]так как четырёхугольник $APOQL$ вписанный

Следовательно, DA — касательная к окружностси, описанной около треугольника POQ. Что и требовалось доказать.

Примерная схема оценивания

Первый способ.

1. Доказано, что четырёхугольник $XEMO$ (и/или $YFMO$) вписанный и/или $\angle AXO = \angle OME$ (и/или $\angle OMF = \angle OYA$) **(1 балл)**.
2. Доказано, что четырёхугольник $AXOY$ вписанный **(1 балл)**.
3. Доказано, что четырёхугольники $APOQ$ и $AYOX$ симметричны относительно AO **(2 балла)**.
4. Доказано, что четырёхугольник $APOQ$ вписанный **(5 баллов)**

   Примечание. Баллы пункта 4 не суммируются с баллами пунктов 1, 2 и 3.

5. Завершение доказательства **(2 балла)**.

Второй способ.

1. Показано, что OP — серединный перпендикуляр к AE, и OQ — серединный перпендикуляр к AF **(3 балла)**

2. Показано, что $\angle PAE = \angle PDE = \angle QAF = \angle QDF$ **(1 балл)**.

3. Доказано, что четырёхугольник $APOQ$ вписанный **(5 баллов)**
Примечание. Баллы пункта 3 не суммируются с баллами пунктов 1 и 2.

4. Завершение доказательства **(2 балла).**

Задача 10.6

Пусть p — простое число вида $(4k+1)$. Найти все такие натуральные числа a, b и c, которые удовлетворяют условиям

(a) *наибольший общий делитель чисел a, b и c равен 1;*

(b) *ab не делится на p;*

(c) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{cp}=\dfrac{4}{p}$.

Ответ: $\varnothing$.

Решение. Пусть $a=dx$, $b=dy$, где $(x,y)=1$. Тогда в силу условия $(a,b,c)=1$, получаем, что $(c,d)=1$.

Из пункта (c) следует, что

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{4}{p}-\frac{1}{cp}=\frac{4c-1}{cp}.$$

С другой стороны

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{d(x+y)}{d^2xy}=\frac{x+y}{dxy}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{x+y}{dxy}=\frac{4c-1}{cp} \iff (x+y)cp=(4c-1)dxy.$$

Следовательно, $(4c-1)dxy\,\vdots\,c$. Отсюда, так как $(4c-1,c)=1$ и $(c,d)=1$, получаем, что $xy\,\vdots\,c$.

Также заметим, что $(x+y)cp\,\vdots\,xy$. Отсюда, поскольку $(xy,x+y)=1$ и $(p,xy)=1$, получаем $c\,\vdots\,xy$. Таким образом, $c=xy$.

Следовательно

$$(4xy-1)dxy=(x+y)xyp \iff (4xy-1)d=(x+y)p \iff$$
$$4dxy-xp-yp-d=0 \iff 16d^2xy-4dxp-4dyp=4d^2 \iff$$
$$16d^2xy-4dxp-4dyp+p^2=p^2+4d^2 \iff (4dx-p)(4dy-p)=p^2+(2d)^2.$$

Заметим, что $(4dx-p)$ можно представить в виде $4l+3$, значит, $(4dx-p)$ имеет хотя бы один простой делитель вида $4m+3$. Обозначим это простой делитель q. Тогда $p^2+(2d)^2$ делится на q. По теореме Жирара p и $2d$ делятся на q. Значит, $p=q$. Но тогда d делится на p, следовательно и $ab=d^2xy$ делится на p. Противоречие.

Таким образом, таких чисел a, b и c нет.

Примерная схема оценивания

1. Доказано, что xy делится на c **(2 балла)**.

2. Доказано, что c делится на xy **(2 балла)**.

3. Доказано, что $xy=c$ **(4 балла)**.

   Примечание. Баллы пункта 3 не суммируются с баллами пунктов 1 и 2.

4. Доказано, что $p^2+(2d)^2$ делится на простой делитель q вида $4m+3$ **(2 балла)**.

5. Завершение доказательства **(1 балл)**.