

Математика пәні бойынша
Республикалық оқушылар олимпиадасының
3-ші (облыстық) кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

10-сынып

1 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1. ABC сүйірбұрышты үшбұрышында AC қабырғасы ең үлкені. Центрі A радиусы AB болатын ω_1 шеңбері BC қабырғасын F нүктесінде қияды. Центрі C радиусы CB болатын ω_2 шеңбері AB қабырғасын E нүктесінде қияды. ω_1 және ω_2 шеңберлері екінші рет D нүктесінде қиылысады. B нүктесінен өтетін EF түзуіне параллель түзу ω_1 және ω_2 шеңберлерін екінші рет сәйкесінше G және T нүктелерінде қияды. $GT = DF + DE$ болатынын дәлелдеңіз.

2. x_1 және x_2 —

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

теңдеуінің әр-түрлі түбірлері болсын.

$$x_1 x_2 \geq \frac{4ac - b^2}{4a^2} \text{ болатынын дәлелдеңіз.}$$

3. Келесі шарттарды қанағаттандыратын барлық натурал (x, y) жұптарын табыңыз

(a) $(x^3 + 1)$ y^2 -қа бөлінеді;

(b) $(y^3 + 1)$ x^2 -қа бөлінеді.

3-й (областной) этап
Республиканской олимпиады школьников
по математике (2021-2022 учебный год)

10 класс

1 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. В остроугольном треугольнике ABC сторона AC наибольшая. Окружность ω_1 с центром в точке A и радиусом AB пересекает сторону BC в точке F . Окружность ω_2 с центром в точке C и радиусом CB пересекает сторону AB в точке E . Окружности ω_1 и ω_2 вторично пересекаются в точке D . Прямая, параллельная EF и проходящая через B , вторично пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках G и T соответственно. Докажите, что $GT = DF + DE$.

2. x_1 и x_2 — два различных действительных корня уравнения

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Докажите, что $x_1 x_2 \geq \frac{4ac - b^2}{4a^2}$.

3. Найти все пары натуральных чисел (x, y) , которые удовлетворяют условиям

(a) $(x^3 + 1)$ делится на y^2 ;

(b) $(y^3 + 1)$ делится на x^2 .