

Математика пәні бойынша  
Республикалық оқушылар олимпиадасының  
3-ші (облыстық) кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

10-сынып

1 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.  
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1.  $ABC$  сүйірбұрышты үшбұрышында  $AC$  қабырғасы ең үлкені. Центрі  $A$  радиусы  $AB$  болатын  $\omega_1$  шеңбері  $BC$  қабырғасын  $F$  нүктесінде қияды. Центрі  $C$  радиусы  $CB$  болатын  $\omega_2$  шеңбері  $AB$  қабырғасын  $E$  нүктесінде қияды.  $\omega_1$  және  $\omega_2$  шеңберлері екінші рет  $D$  нүктесінде қиылысады.  $B$  нүктесінен өтетін  $EF$  түзуіне параллель түзу  $\omega_1$  және  $\omega_2$  шеңберлерін екінші рет сәйкесінше  $G$  және  $T$  нүктелерінде қияды.  $GT = DF + DE$  болатынын дәлелдеңіз.

2.  $x_1$  және  $x_2$  —

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

теңдеуінің әр-түрлі түбірлері болсын.

$$x_1 x_2 \geq \frac{4ac - b^2}{4a^2} \text{ болатынын дәлелдеңіз.}$$

3. Келесі шарттарды қанағаттандыратын барлық натурал  $(x, y)$  жұптарын табыңыз

(a)  $(x^3 + 1)$   $y^2$ -қа бөлінеді;

(b)  $(y^3 + 1)$   $x^2$ -қа бөлінеді.

3-й (областной) этап  
Республиканской олимпиады школьников  
по математике (2021-2022 учебный год)

10 класс

1 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.  
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. В остроугольном треугольнике  $ABC$  сторона  $AC$  наибольшая. Окружность  $\omega_1$  с центром в точке  $A$  и радиусом  $AB$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $F$ . Окружность  $\omega_2$  с центром в точке  $C$  и радиусом  $CB$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $E$ . Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  вторично пересекаются в точке  $D$ . Прямая, параллельная  $EF$  и проходящая через  $B$ , вторично пересекает окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $G$  и  $T$  соответственно. Докажите, что  $GT = DF + DE$ .

2.  $x_1$  и  $x_2$  — два различных действительных корня уравнения

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

$$\text{Докажите, что } x_1 x_2 \geq \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$$

3. Найти все пары натуральных чисел  $(x, y)$ , которые удовлетворяют условиям

(a)  $(x^3 + 1)$  делится на  $y^2$ ;

(b)  $(y^3 + 1)$  делится на  $x^2$ .

**Решения и критерии  
оценивания  
3-го (областного) этапа  
Республиканской олимпиады  
школьников по математике  
2021-2022 учебный год**

*10 класс*

*День 1*

**Общие положения по проверке работ**

1. Приведённые критерии оценивания являются приблизительными. Учащиеся (как и проверяющие), возможно, смогут найти и другие верные решения. Жюри имеет право вносить изменения в критерии, проголосовав за них коллегиально. Главное, чтобы все работы участников оценивались по одинаковым критериям.
2. Перед проверкой жюри следует внимательно изучить олимпиадные задания, их решения и критерии. Желательно прорешать задания самим для возможного поиска альтернативных решений.
3. По окончании проверки обязательно надо проводить разбор и апелляцию задач, притом разборы желательно делать до апелляции и при разборе рассказывать ученикам, за что снимались баллы, а за что добавлялись. Это значительно сократит число учеников желающих подать на апелляцию.
4. В целях более справедливой оценки желательно чтобы одну задачу проверял один человек (или, согласованно, одна группа). В конце, если позволяет время, то следует перепроверить горизонтально (один человек проверяет все задачи одного школьника).
5. Следует помнить, что олимпиадная работа – это не контрольная работа. При оценивании олимпиадных работ, в отличие от оценивания типовых заданий по математике, недопустимо снимать баллы за исправления в работе, за слишком длинное решение, или если решение школьника отличается от решения, приведенного в учебных пособиях.
6. Не следует слишком строго наказывать за технические ошибки или недостатки в решении: описки, легко устранимые арифметические ошибки, непринципиальные моменты в ходе решения, например участник до конца не упростил ответ, не совсем строгий порядок изложение или пропуск очевидных моментов, не влияющих в целом на ход решения. В зависимости от серьёзности ошибки или недостатка снимается не более 2 баллов, в некоторых ситуациях вообще снимать не следует.

7. Внимательно проверяйте насколько соответствует решение критериям проверки. В особенности, если решение ученика неполное и / или альтернативное официальному. Важно понять, насколько участник продвинулся по критериям, какие случаи идеи он предлагает и какие факты им получены или доказаны. В альтернативного решения желательно обсудить решения и критерии для этого решения коллегиально.
8. Однако текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен оцениваться в 0 баллов. Баллы за «старание участника» не выставляются, даже если участник исписал много страниц или построил «красивый» чертёж. Если участник «угадал» правильный ответ, не приводит никаких объяснений, как он его получил, то за это не следует давать баллов.
9. Часто на олимпиадах можно встретить так называемые «счётные решения», когда участник пытается решить задачу «в лоб», опираясь только на алгебраические операции, метод координат, векторный метод, теоремы косинусов, синусов, Чевы, Менелая и т. п., не применяя никакую идею, отличного от технического счёта. Обычно такие решения (если вообще возможно решить таким способом задачу) занимают много страниц текста. К таким «счётным» решениям по сложившейся многолетней традиции применяется следующая схема оценивания:
- если участник смог довести своё счётное решение до конца, то он получает полные **7 баллов**;
  - если участник не довёл своё «счётное» решение до конца (независимо насколько он продвинулся) и / или допустил вычислительную ошибку — **0 баллов**.
10. На математических олимпиадах преимущественно закрепились наилучшим образом зарекомендовавшая себя 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице ниже. Таблица примерная, к каждой задаче следует подходить индивидуально.

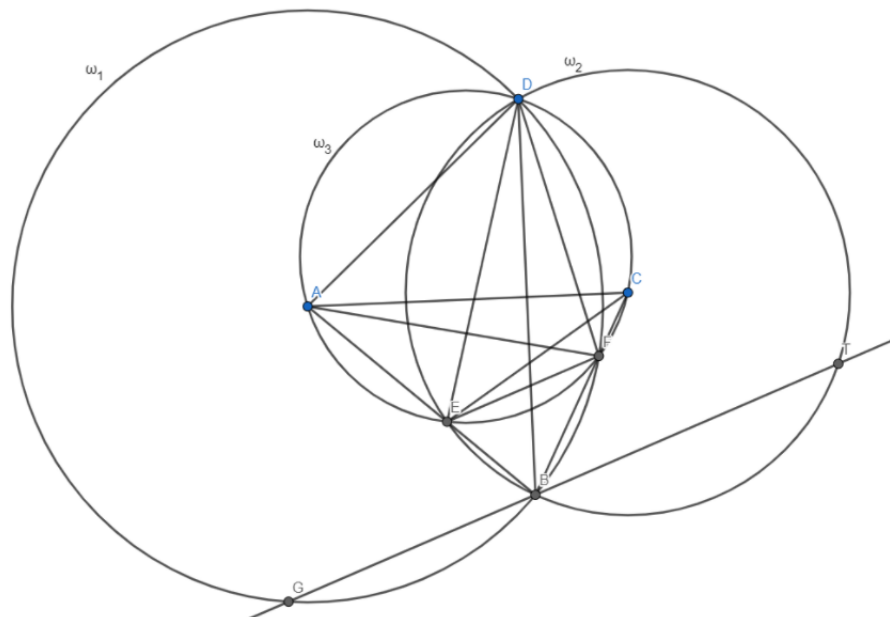
### Примерные критерии оценивания задач

Баллы	Отметка	Правильность (ошибочность) решения
<b>7</b>	+	Полное верное решение.
<b>6-7</b>	$\dot{+}$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
<b>5-6</b>	$\dot{+}$ или $\dot{-}$	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
<b>4</b>	$\pm$	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
<b>2-3</b>	$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
<b>0-1</b>	$\dot{-}$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
<b>0</b>	—	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
<b>0</b>	—	Решение отсутствует.

### Задача 10.1

В остроугольном треугольнике  $ABC$  сторона  $AC$  наибольшая. Окружность  $\omega_1$  с центром в точке  $A$  и радиусом  $AB$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $F$ . Окружность  $\omega_2$  с центром в точке  $C$  и радиусом  $CB$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $E$ . Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  вторично пересекаются в точке  $D$ . Прямая, параллельная  $EF$  и проходящая через  $B$ , вторично пересекает окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $G$  и  $T$  соответственно. Докажите, что  $GT = DF + DE$ .

**Решение.**



Треугольники  $AFB$  и  $CBE$  равнобедренные с одинаковым углом при основании ( $\angle ABC$ ), значит,  $\angle BAF = \angle BCE = \alpha$ .

Следовательно, точки  $A, C, F$  и  $E$  лежат на одной окружности, назовем эту окружность  $\omega_3$ .

$\angle FDB = \angle EDB = \frac{\alpha}{2}$  (опираются на дуги  $FB$  окружности  $\omega_1$  и  $EB$  окружности  $\omega_2$ , центральные углы которых равны  $\alpha$ ).

Следовательно  $\angle FDE = \alpha$ . Значит, точка  $D$  лежит на окружности  $\omega_3$ . Прямая  $EF \parallel GB$ , следовательно,  $\angle EBG = \angle BEF = 180^\circ - \angle AEF$ . Так как точки  $A, D, F$  и  $E$  лежат на одной окружности, то  $\angle ADF = = 180^\circ - \angle AEF$ . Значит  $\triangle ADF = \triangle ABG$ , как равнобедренные треугольники с одинаковыми боковыми сторонами и углом при основании. Следовательно,  $BG = DF$ . Аналогично,  $\triangle CBT = \triangle CED$ , следовательно,  $BT = DE$ .

Значит  $GT = DF + DE$ . Что и требовалось доказать.

### Примерная схема оценивания

1. Показано, что точки  $A, C, F$  и  $E$  лежат на одной окружности  $\omega_3$  (1 балл).
2. Показано, что точка  $D$  лежит на окружности  $\omega_3$  (2 балла).
3. Показано, что точки  $A, D, F$  и  $E$  лежат на одной окружности (2 балла).
4. Показано, что  $BG = DF$  и/или  $BT = DE$  (6 баллов).
5. Завершение доказательства (1 балл).

**Примечание.** Баллы пункта 4 не суммируются с баллами пунктов 1, 2 и 3.

**Задача 10.2**

$x_1$  и  $x_2$  — два различных действительных корня уравнения

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Докажите, что  $x_1x_2 \geq \frac{4ac - b^2}{4a^2}$ .

**Решение.** Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — два различных действительных корня уравнения

$$ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Тогда

$$ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = 0,$$

$$ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d = 0.$$

Вычтем второе уравнение из первого, получим

$$a(x_1^3 - x_2^3) + b(x_1^2 - x_2^2) + c(x_1 - x_2) = 0,$$

$$a(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2) = 0.$$

Так как  $x_1 - x_2 \neq 0$ , то

$$a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b(x_1 + x_2) + c = 0,$$

$$a((x_1 + x_2)^2 - x_1x_2) + b(x_1 + x_2) + c = 0,$$

$$a(x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2) + (c - ax_1x_2) = 0.$$

Обозначим  $y = x_1 + x_2$ , тогда получим квадратное уравнение

$$ay^2 + by + (c - ax_1x_2) = 0,$$

одним из корней которого является число  $y = x_1 + x_2$ .

Так как это уравнение имеет по меньшей мере один действительный корень, то дискриминант этого уравнения неотрицателен:

$$D = b^2 - 4a(c - ax_1x_2) \geq 0 \iff b^2 - 4ac + 4a^2x_1x_2 \geq 0 \iff$$

$$\iff 4a^2x_1x_2 \geq 4ac - b^2 \iff x_1x_2 \geq \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$$

Что и требовалось доказать.

**Примерная схема оценивания**

1. Показано, что  $a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b(x_1 + x_2) + c = 0$  (2 балла).
2. Показано, что  $y = x_1 + x_2$  удовлетворяет квадратному уравнению (2 балла).
3. Указано, что дискриминант этого уравнения неотрицателен (1 балл).
4. Отсюда показано, что  $x_1x_2 \geq \frac{4ac - b^2}{4a^2}$  (2 балла).

**Задача 10.3**

Найти все пары натуральных чисел  $(x, y)$ , которые удовлетворяют условиям

(а)  $(x^3 + 1)$  делится на  $y^2$ ;

(б)  $(y^3 + 1)$  делится на  $x^2$ .

**Ответ:**  $(1, 1)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(2, 3)$ .

**Решение.**

**Случай 1.** Пусть  $x = y$ , тогда из условия получаем, что

$$x^3 + 1 \div x^2.$$

Так как  $x^3$  делится на  $x^2$ , то из последнего утверждения получаем, что число 1 делится на  $x^2$ . Значит,  $x = 1$ .

**Случай 2.** Пусть  $x > y$ .

Так как  $y^3 + 1$  делится на  $x^2$ , то

$$y^3 + 1 \geq x^2.$$

Так как  $x^3 + 1$  делится на  $y^2$  и  $y^3 + 1$  делится на  $x^2$ , то

$$(x^3 + 1)(y^3 + 1) \div x^2 y^2.$$

Рассмотрим выражение

$$(x^3 + 1)(y^3 + 1) = x^3 y^3 + x^3 + y^3 + 1.$$

Так как  $x^3 y^3$  делится на  $x^2 y^2$ , то получаем, что

$$x^3 + y^3 + 1 \div x^2 y^2.$$

Отсюда

$$2x^3 = x^3 + x^3 \geq x^3 + y^3 + 1 \geq x^2 y^2 \iff 2x \geq y^2 \iff x \geq \frac{y^2}{2}.$$

Таким образом, получаем

$$y^3 + 1 \geq x^2 \geq \left(\frac{y^2}{2}\right)^2 = \frac{y^4}{4}.$$

Отсюда

$$y^3 + 1 \geq \frac{y^4}{4} \iff 4y^3 + 4 \geq y^4 \iff y^3(y - 4) \leq 4.$$

Если  $y \geq 5$ , то  $y^3(y - 4) \geq 5^3(5 - 4) = 125 > 4$ , что противоречит последнему неравенству. Значит,  $y \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

**а)** Если  $y = 1$ , то

$$y^3 + 1 = 1^3 + 1 = 2 \div x^2.$$

Значит,  $x = 1$ , но  $x > y$ . Противоречие.

**б)** Если  $y = 2$ , то

$$y^3 + 1 = 2^3 + 1 = 9 \div x^2.$$

Значит,  $x = 1$  или  $x = 3$ . Так как  $x > y$ , то  $x = 3$ . То есть получаем пару  $(3, 2)$ . Заметим, что эта пара также удовлетворяет и второму условию. Действительно,

$$x^3 + 1 = 3^3 + 1 = 28 \div y^2 = 4.$$

**с)** Если  $y = 3$ , то

$$y^3 + 1 = 3^3 + 1 = 28 \div x^2.$$

Значит,  $x = 1$  или  $x = 2$ . Так как  $x > y$ , то получаем противоречие.

**д)** Если  $y = 4$ , то

$$y^3 + 1 = 4^3 + 1 = 65 \div x^2.$$

Значит,  $x = 1$ , но  $x > y$ . Противоречие.

Итак, в случае 2 получаем одну пару  $(3, 2)$ , удовлетворяющую условию задачи.

**Случай 3.** Пусть  $y > x$ .

Рассуждая аналогично случаю 2, получаем ещё одну пару решений:  $(2, 3)$ .

Таким образом, задача имеет три решения:  $(1, 1)$ ,  $(3, 2)$  и  $(3, 2)$ .

### Примерная схема оценивания

1. Правильно рассмотрен случай, когда  $x = y$  (**1 балл**).
2. Доказано, что  $x^3 + y^3 + 1$  делится на  $x^2y^2$  (**1 балл**).
3. Получено неравенство или иное условие, позволяющее разумно ограничить количество проверяемых значений (например, в решении получено неравенство  $y^3(y - 4) \leq 4$ , что ограничило значения  $y$ :  $y \in \{1, 2, 3, 4\}$ ). Количество оставшихся значений для проверки должно быть конечно и невелико (чтобы можно было проверить за ограниченное время) (**3 балла**).
4. Перебор оставшихся вариантов с нахождением соответствующих пар решений (**2 балла**).  
**Примечание.** Если в пункте 4 упущены какие-то случаи, штраф **1-2 балла** в зависимости от количества упущенных случаев.
5. Правильный ответ без обоснования (**0 баллов**).