Математика пәні бойынша Республикалық олимпиаданың
3-ші кезеңі 2020-2021 Қазақстан, 24 ақпан 2021 ж.
Ұзақтығы: 3 сағат *11-сынып*

1 тур

Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1. Бастапқыда өлшемі 2021×2021 болатын тақтаның барлық ұяшықтары ақ түсті болсын. Арман мен Бақытжан келесі ойын ойнайды. Бастапқыда Арман n ұяшықтарды қызыл түске бояйды. Содан кейін Бақытжан 1011 қатарды және 1011 бағанды таңдап, таңдалған қатарлар мен бағандардағы барлық ұяшықтарды қара түске бояйды. Кем дегенде бір қызыл ұяшық қалса Арман жеңеді, әйтпесе Бақытжан жеңеді. Бақытжан қалай әрекет ететініне қарамастан, Арман қандай ең кіші n үшін өзіне жеңіске жетуге кепілдік бере алады?

2. $AB = AC + \frac{BC}{2}$ болатындай ABC үшбұрышы берілсін. BC қабырғасында $BP = PQ = QR = RC$ болатындай P, Q және R нүктелері белгіленген. AP және AR түзулері PQ-ға жүргізілген орта перпендикулярды сәйкесінше X және Y нүктелерінде қияды. Диаметрі XY кесіндісіндісі болатындай Ω шеңбері салынған. Ω шеңбері B және R нүктелері арқылы өтетінін дәлелдеңіз.

3.
$$\frac{8^n - 1}{n^2 + n + 1}$$
саны да натурал болатындай шексіз көп n натурал сандары табылатынын көрсетіңіз.

3-й этап Республиканской олимпиады по предмету
математика
2020-2021 Казахстан, 24 февраля 2021 г. Длительность: 3 часа

11 класс

1 тур

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. Изначально все клетки доски 2021×2021 белые. Арман и Бахытжан играют в такую игру. Сначала Арман закрашивает n квадратиков в красный цвет. Затем Бахытжан выбирает 1011 строк и 1011 столбцов и перекрашивает все ячейки в выбранных строках и столбцах в чёрный цвет. Арман выигрывает в том случае, если осталась хотя бы одна красная клетка, в противном случае выигрывает Бахытжан. При каком наименьшем n Арман гарантирует себе победу, независимо от того, как будет действовать Бахытжан?

2. Дан треугольник ABC, в котором $AB = AC + \frac{BC}{2}$. На стороне BC отметили точки P, Q и R так, что BP =PQ=QR=RC. Прямые AP и AR пересекают серединный перпендикуляр к PQ соответственно в точках X и Y . На отрезке XY , как на диаметре, построена окружность Ω. Докажите, что Ω проходит через точки B и R.

3. Покажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что

$$\frac{8^n-1}{n^2+n+1}$$

также является натуральным числом.