Областная олимпиада по математике, 2020 год, 9 класс

1. На олимпиаде по математике приняли участие 45 школьников. Участникам было предложено шесть задач, каждая из которых оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Докажите, что найдутся 3 участника, результаты которых отличаются не более, чем на 1 балл.

2. Треугольник ABC удовлетворяет следующему условию: на отрезке BC существует единственная точка X такая, что $AX^2 = BX \cdot CX$. Докажите, что $AB + AC = BC\sqrt{2}$.

3. Для положительных действительных чисел x, y, z выполнено равенство $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 12(x + y + z) = 108$. Найдите наибольшее возможное значение выражения x^3y^2z.

4. В треугольнике ABC проведена высота AH, а точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB соответственно. Пусть K — точка, симметричная точке B_1 относительно прямой BC. Докажите, что прямая C_1K делит отрезок HA_1 пополам.

5. Пусть каждое из натуральных чисел a и b имеют не менее 11 делителей. Выписав делителей a и b в порядке возрастания, соответственно получили (конечные) последовательности $1 = a_1 < a_2 < a_3 < ...$ и $1 = b_1 < b_2 < b_3 < ...$. Найдите числа a и b, если известно, что $a_{10} + b_{10} = a$ и $a_{11} + b_{11} = b$.

6. Даны n $(n \geq 2)$ гирь с массами m_1, m_2, ..., m_n, где m_k — целое число такое, что $1 \leq m_k \leq k$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$. Докажите, что если сумма $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ четна, то данные гири можно разбить на две группы с одинаковой суммарной массой.