

Областная олимпиада по математике, 2020 год, 11 класс

1. В прямоугольном треугольнике ABC точка M — середина гипотенузы BC . На отрезках AC и AB нашлись соответственно точки D и E такие, что $AE \cdot BE = AD \cdot CD$. Докажите, что $ME = MD$.
2. В колледже учатся 300 студентов. Любые два студента либо знают друг друга, либо не знают друг друга, и нет трех студентов, знающих друг друга. Известно, что каждый студент знает не более n других студентов и для каждого m ($1 \leq m \leq n$) существует студент, знающий ровно m других студентов. Найдите наибольшее возможное значение n .
3. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n \leq 10$ с целыми коэффициентами такой, что для каждого $k \in \{1, 2, \dots, 10\}$ существует целое число m , что $P(m) = k$. Докажите, что если $|P(10) - P(0)| < 10000$, то для любого $k \in \{1, 2, \dots, 10000\}$ существует целое число m такое, что $P(m) = k$.
4. Пусть каждое из натуральных чисел a и b имеют не менее 11 делителей. Выписав делителей a и b в порядке возрастания, соответственно получили (конечные) последовательности $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ и $1 = b_1 < b_2 < b_3 < \dots$. Найдите числа a и b , если известно, что $a_{10} + b_{10} = a$ и $a_{11} + b_{11} = b$.
5. Для любых положительных вещественных чисел x и y докажите неравенство:
$$\frac{1}{x+y+1} - \frac{1}{(x+1)(y+1)} < \frac{1}{11}.$$
6. В треугольнике ABC окружность ω проходит через точки A и B и пересекает отрезки BC и AC соответственно в точках D и E . Биссектриса угла BAD во второй раз пересекает ω в точке M , а прямые BD и ME пересекаются в точке K . Пусть перпендикуляр, опущенный из точки K на прямую AM , пересекает прямую AC в точке N . Докажите, что $\angle BNK = \angle DNK$.