

Областная олимпиада по математике, 2020 год, 10 класс

1. В прямоугольном треугольнике ABC точка M — середина гипотенузы BC . На отрезках AC и AB нашлись соответственно точки D и E такие, что $AE \cdot BE = AD \cdot CD$. Докажите, что $ME = MD$.
2. Найдите все пары простых чисел (q, r) , для которых выполнено равенство $q(q^2 - q - 1) = r(2r + 3)$.
3. Действительные числа $a_1, a_2, \dots, a_{90} \geq -1$ такие, что $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{90}^3 = 0$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{90}^2$.
4. Даны фиксированные натуральные числа m и n . Рассмотрим многоугольник с $m + n$ вершинами. Покрасим m вершин многоугольника в красный цвет, а остальные n вершин — в синий цвет. Запишем на стороне многоугольника число 2, если оба конца этой стороны покрашены в красный цвет, число $1/2$ — если оба конца отрезка покрашены в синий цвет, и число 1 — в остальных случаях. Пусть P — произведение всех записанных чисел. Найдите возможные значения P .
5. Последовательность $\{a_i\}$ определяется следующим образом: $a_1 = 2020$, $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{a_n}$ для всех $n \geq 1$. Докажите, что эта последовательность не содержит квадрат рационального числа.
6. В треугольнике ABC окружность ω проходит через точки A и B и пересекает отрезки BC и AC соответственно в точках D и E . Биссектриса угла BAD во второй раз пересекает ω в точке M , а прямые BD и ME пересекаются в точке K . Пусть перпендикуляр, опущенный из точки K на прямую AM , пересекает прямую AC в точке N . Докажите, что $\angle BNK = \angle DNK$.