Областная олимпиада по математике, 2019 год, 11 класс

1. Последовательность $\{a_n\}$ определена следующим образом: $a_1 = 3$ и $a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2}$ для всех натуральных n. Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство $\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + ... + \frac{1}{a_n+1} < \frac{1}{2}$.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, а биссектриса внешнего угла при вершине A во второй пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P. Некоторая окружность, проходящая через точки A и P, во второй раз пересекает отрезки BP и CP в точках E и F соответственно. Докажите, что $\angle DEP = \angle DFP$.

3. Каждая точка плоскости окрашена в один из четырех цветов. Докажите, что найдутся две точки A и B одного цвета такие, что $AB = 1$ или $AB = \sqrt{3}$.

4. Можно ли квадрат со стороной 1 разбить на 18 прямоугольников, стороны которых параллельны сторонам квадрата, так, чтобы периметр каждого прямоугольника разбиения была равна $\frac{5}{2}$?

5. Найдите все такие пары натуральных чисел n и k, что число $2^k + 10n^2 + n^4$ является полным квадратом.

6. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором $\angle ABC = \angle AED = 90^\circ$, $\angle ACB = \angle ADE$. Точки P и Q — середины сторон BC и DE соответственно. Отрезки CQ и DP пересекаются в точке X. Докажите, что $AX \perp BE$.