Областная олимпиада по математике, 2019 год, 10 класс

1. Найдите все такие пары простых чисел p и q, что число $p^{q+1}+q^{p+1}$ является полным квадратом.

2. Последовательность $\{a_n\}$ определена следующим образом: $a_1=3$ и $a_{n+1}=\frac{a_n^2+1}{2}$ для всех натуральных n. Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство $\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}<\frac{1}{2}$.

3. В треугольнике ABC точка M — середина AB, точка N — середина CM. На плоскости отмечена точка X такая, что X и B лежат по разные стороны от CM, $\angle XMC=\angle MBC$ и $\angle XCM=\angle MCB$. Пусть Ω — описанная окружность треугольника AMX. (a) Докажите, что прямая CM касается Ω. (b) Докажите, что прямые NX и AC пересекаются на Ω.

4. Две окружности Γ_1 и Γ_2 с центрами в точках O_1 и O_2 соответственно, пересекаются в точках A и B. Прямая O_1A пересекает Γ_2 во второй раз в точке C, а прямая O_2A пересекает Γ_1 во второй раз в точке D. Прямая ℓ, параллельная AD, пересекает Γ_1 в точках B и E. Известно, что $O_1A \parallel DE$. Докажите, что $CD \perp O_2C$.

5. Найдите число способов заполнения клеток таблицы 2019×2019 числами из множества $\{-2,-1,1,2\}$ так, чтобы произведения чисел в каждой строке и в каждом столбце были равны -2 (минус два).

6. Дано натуральное число $n>2$. Пусть k — наименьшее натуральное число такое, что множество $\{1,3,5,\ldots,2n-1\}$ можно разбить на два подмножества A и B так, что сумма элементов A ровно в k раз больше суммы элементов B. Докажите, что числа n и k взаимно просты.