Областная олимпиада по математике, 2018 год, 9 класс

1. Вычислить сумму $\dfrac{3}{1!+2!+3!}+\dfrac{4}{2!+3!+4!}+...+\dfrac{2018}{2016!+2017!+2018!}$.

2. Докажите, что для любых действительных чисел a, b и c, сумма квадратов которых равна 3, выполняется неравенство $5(a^4+b^4+c^4)+9\geq 8(a^3+b^3+c^3)$.

3. В треугольнике ABC вневписанные окружности касаются сторон AB, BC, AC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Точка A' – точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам BB_1 и CC_1. Точка B' – точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AA_1 и CC_1. Точка C' – точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AA_1 и BB_1. Точки A', B', C' лежат внутри треугольника ABC. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

4. Найдите все функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такие, что при всех $m,n\in\mathbb{N}$ $f\left(m-n+f(n)\right)=f(m)+f(n)$.

5. Несколько аэропортов связаны двусторонними беспересадочными авиарейсами так, что из каждого аэропорта выходит не более 2018 рейсов. Докажите, что можно разделить все рейсы между 11 авиакомпаниями компаниями так, что рейсами любой из компаний нельзя совершить круговое путешествие по нечетному числу аэропортов.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Прямая AB разбивается на отрезок AB и лучи a и b с началами A и B соответственно. Луч r симметричен a относительно биссектрисы угла CAD; луч s симметричен b относительно биссектрисы угла CBD. Оказалось, что точки O и C лежат по одну сторону от прямой AB, а точка P пересечения лучей r и s — по другую. Докажите, что OP и CD перпендикулярны.