Областная олимпиада по математике, 2018 год, 11 класс

1. Найти все пары натуральных чисел $(x,\ y)$ таких, что 2^x+3^y является точным квадратом.

2. Точка P лежит внутри треугольника ABC. Прямые AP, BP и CP пересекают прямые BC, CA и AB соответственно в точках D, E и F. Докажите, что если два из шести четырёхугольников $ABDE$, $BCEF$, $CAFD$, $AEPF$, $BFPD$ и $CDPE$ таковы, что около них можно описать окружность, то окружность можно описать около каждого из этих шести четырёхугольников.

3. Пусть $N=m^{2018}+1\ \ (m\in\mathbb{N}, m>2018)$. На доске в указанном порядке в ряд выписаны числа N, $N-m$, $N-2m$, …, $m+1$, 1. За один шаг с доски стирается самое левое из оставшихся чисел вместе со своими делителями (если такие есть). Эту операцию проделали несколько раз, пока на доске не осталось ни одного числа. Какое число стёрли последним?

4. Пусть $S_n=\{0,1,2,\dots,4n-1\}$. Подмножество A множества S_n называется редким, если для любого $k=0,1,2,\dots,n-1$ выполняются условия: $|A\cap\{4k+1,4k+2,4k+3\}|\le 1$, $|A\cap\{4k-2,4k-1,4k,4k+1,4k+2\}|\le 2$. Найдите количество редких подмножеств. (Здесь $|M|$ означает количество элементов множества M.)

5. Найти все функции $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, удовлетворяющие при всех $x,y\in(0,+\infty)$ условию $f(x)f(yf(x))=f\,(x+y)$.

6. Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки A_1,B_1,C_1 и D_1 выбраны соответственно на отрезках AO,BO,CO и DO так, что $AA_1=CC_1$, $BB_1=DD_1$. Пусть описанные окружности треугольников AOB и COD второй раз пересекаются в точке M, описанные окружности треугольников AOD и BOC второй раз пересекаются в точке N, описанные окружности треугольников A_1OB_1 и C_1OD_1 второй раз пересекаются в точке P, описанные окружности треугольников A_1OD_1 и B_1OC_1 второй раз пересекаются в точке Q. Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.