

Областная олимпиада по математике, 2018 год, 10 класс

1. Докажите, что для любых действительных чисел a , b и c , сумма квадратов которых равна 3, выполняется неравенство $5(a^4 + b^4 + c^4) + 9 \geq 8(a^3 + b^3 + c^3)$.
2. Найти все пары натуральных чисел (x, y) таких, что $2^x + 3^y$ является точным квадратом.
3. В треугольнике ABC вневписанные окружности касаются сторон AB , BC , AC в точках C_1 , A_1 , B_1 соответственно. Точка A' – точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам BB_1 и CC_1 . Точка B' – точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AA_1 и CC_1 . Точка C' – точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AA_1 и BB_1 . Точки A' , B' , C' лежат внутри треугольника ABC . Докажите, что прямые AA' , BB' , CC' пересекаются в одной точке.
4. Несколько аэропортов связаны двусторонними беспересадочными авиарейсами так, что из каждого аэропорта выходит не более 2018 рейсов. Докажите, что можно разделить все рейсы между 11 авиакомпаниями так, что рейсами любой из компаний нельзя совершить круговое путешествие по нечетному числу аэропортов.
5. Найти все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяющие при всех $x, y \in \mathbb{R}$ условию $f(xf(x) + f(y)) = x^2 + y$.
6. Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 выбраны соответственно на отрезках AO, BO, CO и DO так, что $AA_1 = CC_1$, $BB_1 = DD_1$. Пусть описанные окружности треугольников AOB и COD второй раз пересекаются в точке M , описанные окружности треугольников AOD и BOC второй раз пересекаются в точке N , описанные окружности треугольников A_1OB_1 и C_1OD_1 второй раз пересекаются в точке P , описанные окружности треугольников A_1OD_1 и B_1OC_1 второй раз пересекаются в точке Q . Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.