Областная олимпиада по математике, 2017 год, 9 класс

1. На доске выписаны числа 1,2, ..., 2016, 2017. За один шаг разрешается выбрать три идущие подряд числа a, b и c, из которых ни одно не равно 0, и заменить их на тройку чисел $b-1$, $c-1$, $a-1$ в указанном порядке. Какую наименьшую сумму записанных на доске чисел можно получить, делая такие шаги?

2. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны. На сторонах AC и BC выбраны соответственно такие точки K и L, что биссектрисы углов KLB и AKL пересекаются на отрезке AB в точке F. Найдите отношение $AF : FB$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 3x\,[x] + 2x = a$ имеет ровно два различных положительных корня. (Здесь $[x]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее x).

4. Какое максимальное число сторон может иметь выпуклый многоугольник, которого все углы имеют целочисленную градусную меру?

5. Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению $2^{2x+1} + 9 \cdot 2^x + 5 = y^2$.

6. Докажите, что для всех положительных чисел a, b, c справедливо неравенство $\dfrac{a^2}{3a^2+b^2+2ac} + \dfrac{b^2}{3b^2+c^2+2ab} + \dfrac{c^2}{3c^2+a^2+2bc} \leq \dfrac{1}{2}$.