Областная олимпиада по математике, 2017 год, 11 класс

1. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Биссектриса угла BAC пересекает эту окружность в точке D, а биссектриса угла ABC пересекает эту окружность в точке E. Известно, что окружность, описанная около треугольника DEO, проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC. Найдите величину угла ACB.

2. Дана последовательность x_n $(n = 1, 2, ...)$, в которой $x_1 = 0$. Известно, что для всех целых $n > 1$ $x_n = x_{n-1} + \left[\frac{n^2}{4}\right]$. (Здесь $[a]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее a). Определите все значения n, при которых x_n делится на n.

3. Найти все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие соотношению $(x-2) f(y) + f(y + 2f(x)) = f(x + yf(x))$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

4. На научную конференцию прибыло 2017 ученых. Каждый из этих ученых знаком не более чем с тремя другими учеными, причем их знакомство взаимно (то есть если A знает B, то B знает A). На этой конференции ученые хотят послушать доклады тех ученых, с которыми они еще не знакомы. Докажите, что ученых можно распределить по 4 секциям так, чтобы на каждой секции присутствовало не более 1007 ученых, причем не знакомых друг с другом.

5. Чему равно наименьшее возможное значение выражения $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + ... + (x_{2016} - x_{2017})^2 + (x_{2017} - x_1)^2$, где $x_1, x_2, ..., x_{2017}$ — различные целые числа.

6. Дан треугольник ABC. Пусть O — центр его описанной окружности, B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB соответственно. Среди окружностей, которые содержат вершину A и точку O, но не проходят через точки B_1 и C_1 выберем окружность. Пусть эта окружность пересекает прямые OB_1 и OC_1 соответственно в точках K и L. Докажите, что отношение KB_1 к LC_1 не зависит от выбора окружности.