Областная олимпиада по математике, 2017 год, 10 класс

1. На доске выписаны числа 1,2, ..., 2016, 2017. За один шаг разрешается выбрать три идущие подряд числа a, b и c, из которых ни одно не равно 0, и заменить их на тройку чисел $b-1$, $c-1$, $a-1$ в указанном порядке. Какую наименьшую сумму записанных на доске чисел можно получить, делая такие шаги?

2. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC. На стороне AB выбрана такая точка D, что $\angle ACD = \angle CBD$. Точка E — середина отрезка BD, а S — центр окружности, описанной около треугольника BCD. Докажите, что точки A, E, S и C лежат на одной окружности.

3. Дана последовательность x_n $(n = 1, 2, ...)$, в которой $x_1 = 0$. Известно, что для всех целых $n > 1$ $x_n = x_{n-1} + \left[\dfrac{n^2}{4}\right]$. (Здесь $[a]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее a). Определите все значения n, при которых x_n делится на n.

4. В компьютерной сети 2017 компьютеров. Любые два компьютера соединены кабелем. Из-за перегрузок в сети периодически перегорает один из кабелей в некоторой части сети, образующей цикл из четного числа компьютеров. Может ли через какое-то время остаться ровно 2016 целых кабелей, если ни один из перегоревших кабелей не ремонтируется?

5. Докажите, что для всех положительных чисел a, b, c справедливо неравенство $\dfrac{a^2}{3a^2+b^2+2ac} + \dfrac{b^2}{3b^2+c^2+2ab} + \dfrac{c^2}{3c^2+a^2+2bc} \leq \dfrac{1}{2}$.

6. Дан треугольник ABC. Пусть O — центр его описанной окружности, B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB соответственно. Среди окружностей, которые содержат вершину A и точку O, но не проходят через точки B_1 и C_1 выберем окружность. Пусть эта окружность пересекает прямые OB_1 и OC_1 соответственно в точках K и L. Докажите, что отношение KB_1 к LC_1 не зависит от выбора окружности.