Областная олимпиада по математике, 2016 год, 9 класс

1. Назовем натуральное число *специальным*, если в его десятичной записи каждая пара последовательных цифр образует двузначное число, делящееся на 17 или на 43. Например, число 8685 является специальным, а число 8684 — нет. Найдите количество 2016-значных специальных чисел.

2. Пусть R — радиус описанной около треугольника ABC окружности, а S — его площадь. Докажите, что если $S \geq R^2$, то треугольник ABC не может быть тупоугольным.

3. На окружности отмечены $2n+1$ различных точек, причем n из них окрашены в синий цвет, n точек — в красный, а одна — в черный. Докажите, что можно провести n попарно непересекающихся отрезков с концами в этих точках так, чтобы ни одна точка не являлась концом более чем одного отрезка и чтобы никакой отрезок не соединял синюю и красную точки.

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK и BL. Известно, что KL — биссектриса угла AKC. Найдите величину угла BAC.

5. Найдите все четверки натуральных чисел (a, b, c, d), удовлетворяющие соотношению $a! + b! + c! = 2^d$.

6. Докажите, что для любых неотрицательных действительных чисел x, y и z справедливо неравенство $\sqrt{2x^2+3y^2+4z^2} + \sqrt{3x^2+4y^2+2z^2} + \sqrt{4x^2+2y^2+3z^2} \geq \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2$