Областная олимпиада по математике, 2016 год, 11 класс

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy^2z^3 + yz^2 = \sqrt{2}, \\ yz^2x^3 + zx^2 = 2, \\ zx^2y^3 + xy^2 = 2\sqrt{2}, \end{cases}$ в действительных числах.

2. Пусть R — радиус описанной около треугольника ABC окружности, а S — его площадь. Докажите, что если $S \geq R^2$, то все углы треугольника ABC больше 30° и не превосходят 90°.

3. Докажите, что для любых натуральных чисел n и k произведение $(k+1)! \cdot \left(1^k + 2^k + ... + n^k\right)$ делится на $n(n+1)$.

4. Найдите все натуральные числа n, для которых в каждой вершине правильной n-угольной призмы можно записать число 1 или -1 так, чтобы для любой из $n+2$ граней призмы произведение чисел, записанных в ее вершинах, было равно -1.

5. Пара натуральных чисел (a, b) называется *подходящей*, если существует такое натуральное c, что числа $a+b+c$ и abc являются полными квадратами. В противном случае она называется *неподходящей*. А) Докажите, что существует бесконечно много неподходящих пар. Б) Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных n, что $(2, n)$ — подходящая пара.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ на сторонах BC и DC выбраны точки P и Q соответственно так, что $\angle BAP = \angle DAQ$. Известно, что прямая, проходящая через ортоцентры треугольников ABP и ADQ, перпендикулярна AC. Докажите, что площади треугольников ABP и ADQ равны.