Областная олимпиада по математике, 2016 год, 10 класс

1. Найдите все такие четверки целых чисел (a, b, c, d), что $2a^2 + 2c^2 + 2ac + 3b^2 + 3d^2 = 6bd + 11$ и $a \geq b \geq c \geq d$.

2. Дана прямоугольная таблица, в которой n строк и m столбцов. Найдите все такие пары натуральных чисел (k, l), что в таблице можно отметить несколько клеток таким образом, чтобы в каждой строке было отмечено ровно k клеток, а в каждом столбце — ровно l клеток.

3. В треугольнике ABC стороны AB и AC равны. Прямая, проходящая через вершину A, пересекает описанную около ABC окружность вторично в точке Z, а окружность с центром A и радиусом AB — в точках X и Y. Прямые BX и CY пересекаются в точке P. Докажите, что прямые CX, BY и PZ пересекаются в одной точке.

4. Для вещественных чисел α, β, γ, δ, ε справедливо неравенство $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta + \sin\varepsilon \geqslant 3$. Докажите, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta + \cos\varepsilon \leqslant 4$.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, причем точка O лежит внутри четырехугольника и $\angle BAC = \angle ODA$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через E перпендикулярно AD, пересекает прямую BC в точке M. Прямая, проходящая через E перпендикулярно BC, пересекает прямую AD в точке P. Докажите, что прямая MP проходит через середину EO.

6. Пара натуральных чисел (a, b) называется *подходящей*, если существует такое натуральное c, что числа $a + b + c$ и abc являются полными квадратами. В противном случае она называется *неподходящей*. А) Докажите, что существует бесконечно много неподходящих пар. Б) Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных n, что $(2, n)$ — подходящая пара.