Областная олимпиада по математике, 2015 год, 9 класс

1. Пусть x, y, z — действительные числа, для которых справедливо неравенство $x+y+z > \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Докажите, что $x+y+z > \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$.

2. Найдите все натуральные числа a, для которых $\dfrac{3^a-2^a}{2^a-1}$ является квадратом некоторого рационального числа.

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC, в котором $AB = BC$, взяты точки M и N соответственно так, что описанная около треугольника AMN окружность касается стороны BC в точке P. Пусть Q — вторая точка пересечения прямой MP с описанной около треугольника CNP окружностью. Найдите отношение AP/QM.

4. Назовём медиану треугольника хорошей, если она равна одной из его сторон. Смогут ли все три медианы треугольника быть хорошими?

5. Докажите, что из любых пяти различных положительных чисел можно выбрать два числа, ни сумма, ни разность которых не равны ни одному из оставшихся чисел.

6. Пусть n — натуральное число. Через $P_k(n)$ обозначим произведение всех его делителей, кратных k (пустое произведение равно 1). Докажите, что произведение $P_1(n) \cdot P_2(n) \cdot \ldots \cdot P_n(n)$ является квадратом некоторого натурального числа.