Областная олимпиада по математике, 2015 год, 11 класс

1. Докажите, что для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}<n\left(1-\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right).$$

2. Решите уравнение $x^y \cdot y^x = (x+y)^z$ в натуральных числах x, y, z.

3. Прямоугольник *вписан* в треугольник, если все его вершины лежат на сторонах треугольника. Докажите, что геометрическим местом центров (точек пересечения диагоналей) всех вписанных в данный остроугольный треугольник прямоугольников являются три пересекающихся в одной точке незамкнутых отрезка.

4. Пусть n — натуральное число. Через $P_k(n)$ обозначим произведение всех его делителей, кратных k (пустое произведение равно 1). Докажите, что произведение $P_1(n)\cdot P_2(n)\cdot\cdots\cdot P_n(n)$ является квадратом некоторого натурального числа.

5. Найдите количество перестановок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ набора $(1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющих условиям $x_i < x_{i+2}$ при $1 \le i \le n-2$, $x_i < x_{i+3}$ при $1 \le i \le n-3$. Здесь $n \ge 4$.

6. Окружность диаметра d вписана в выпуклый четырёхугольник $ABCD$ и касается сторон BC и DA в точках K и L соответственно. Докажите или опровергните следующее утверждение: среднее гармоническое сторон AB и CD равно отрезку KL тогда, и только тогда, когда среднее геометрическое сторон AB и CD равно d. (Средним гармоническим положительных чисел a и b называется число $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, а средним геометрическим — число $\sqrt{ab}$.)