Областная олимпиада по математике, 2015 год, 10 класс

1. Пусть x, y, z — действительные числа, для которых справедливы соотношения $x \geq \frac{1}{2}$, $y \geq \frac{1}{2}$, $z \geq \frac{1}{2}$ и $xyz = 1$. Докажите неравенство

$$3 + x + y + z \leq 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

2. Решите уравнение $a^5 = a^3bc + b^2c$ в целых числах a, b, c.

3. Прямоугольник *вписан* в треугольник, если все его вершины лежат на сторонах треугольника. Докажите, что геометрическим местом центров (точек пересечения диагоналей) всех вписанных в данный остроугольный треугольник прямоугольников являются три пересекающихся в одной точке незамкнутых отрезка.

4. Пусть n — натуральное число. Через $P_k(n)$ обозначим произведение всех его делителей, кратных k (пустое произведение равно 1). Докажите, что произведение $P_1(n) \cdot P_2(n) \cdot \dots \cdot P_n(n)$ является квадратом некоторого натурального числа.

5. Найдите количество перестановок $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ набора $(1, 2, \dots, n)$, удовлетворяющих условиям $x_i < x_{i+2}$ при $1 \leq i \leq n-2$, $x_i < x_{i+3}$ при $1 \leq i \leq n-3$. Здесь $n \geq 4$.

6. В треугольнике ABC известно, что $\angle ABC = 30^\circ$, $AB > AC$ и $\angle BAC$ — тупой. Внутри этого треугольника выбрана такая точка D, что $BD = CD$ и $\angle BDA = 3\angle BCA$. Найдите угол ACD.