

Областная олимпиада по математике, 2014 год, 9 класс

1. На прямой отмечены четыре различные точки. Для каждой из них вычисляется сумма расстояний от этой точки до трех других. Может ли в результате образоваться следующая четверка чисел? а) 29, 29, 35, 37; б) 28, 29, 35, 37; в) 28, 34, 34, 37.

2. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр в десятичной записи натурального числа n . Вычислите значение выражения

$$S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \dots + S(2013) - S(2014).$$

3. Пусть $ABCD$ — прямоугольник. Окружность с центром в точке D радиуса DA пересекает продолжение стороны AD в точке P . Прямая PC пересекает во второй раз окружность в точке Q , а прямую AB — в точке R . Докажите, что $BQ = BR$.

4. Можно ли покрасить каждое натуральное число в один из трех цветов (синий, желтый и красный) так, чтобы все цвета были использованы и для любых двух чисел разного цвета их сумма была третьего цвета (отличного от цветов, в которые покрашены сами числа)?

5. Решите уравнение $2^{m+2n+1} + 4^m + 16^n = 4^k$ в натуральных числах m, n, k .

6. Докажите, что если a, b, c — длины сторон некоторого треугольника, то система

$$\begin{cases} a(yz + x) = b(zx + y) = c(xy + z), \\ x + y + z = 1, \end{cases}$$

имеет решение в положительных числах x, y, z .