Областная олимпиада по математике, 2014 год, 11 класс

1. Пусть $[u]$ — целая часть вещественного числа u, то есть наибольшее целое, не превосходящее u. Натуральные числа a и b удовлетворяют уравнению $[\sqrt{a}\ ]\cdot[\sqrt{b}\ ]=[\sqrt{ab}\ ]$. Докажите, что по крайней мере одно из этих двух чисел — полный квадрат.

2. В треугольнике ABC выполнены соотношения $\angle B=2\angle C$ и $\angle A>90^\circ$. Пусть M — середина стороны BC. Прямая, проходящая через точку C перпендикулярно AC, пересекает прямую AB в точке D. Докажите, что $\angle AMB=\angle DMC$.

3. У школьника имеется 600 карточек с записанными на них числами. На 200 карточках записано число 1, на других 200 карточках записано число 2 и, наконец, на оставшихся 200 карточках записано число 5. Школьнику нужно разложить карточки на несколько групп так, чтобы в каждой группе сумма чисел на карточках была равна 9. При этом некоторые карточки, возможно, не будут использованы. Какое наибольшее количество групп карточек может получиться у школьника?

4. Можно ли покрасить каждое натуральное число в один из трех цветов (синий, желтый и красный) так, чтобы все цвета были использованы и для любых двух чисел разного цвета их сумма была третьего цвета (отличного от цветов, в которые покрашены сами числа)?

5. В треугольнике ABC через A, B, C обозначены величины (в радианах) углов CAB, ABC, BCA, соответственно, а через a, b, c — длины сторон BC, CA, AB, соответственно. Докажите, что если

$$b\,(a+b)\,(b+c)=a^3+b\left(a^2+c^2\right)+c^3,$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}+\frac{1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}=\frac{2}{\sqrt{A}+\sqrt{C}}.$$

6. Натуральные числа m и n таковы, что если к десятичной записи числа m приписать справа десятичную запись числа n, то получится десятичная запись числа $(m+n)^2$. Докажите, что если n делится на m, то $\dfrac{n}{m}=6$.