

Областная олимпиада по математике, 2014 год, 10 класс

1. Пусть $ABCD$ — такой выпуклый четырехугольник, что треугольник ABD равносторонний, а треугольник BCD равнобедренный, причем $\angle C = 90^\circ$. Обозначим через E середину стороны AD . Найдите величину угла CED .
2. Сто нечетных натуральных чисел записаны в ряд. Возможна ли ситуация, когда одновременно сумма любых пяти записанных подряд чисел является полным квадратом и сумма любых девяти записанных подряд чисел является полным квадратом?
3. У школьника имеется 600 карточек с записанными на них числами. На 200 карточках записано число 1, на других 200 карточках записано число 2 и, наконец, на оставшихся 200 карточках записано число 5. Школьнику нужно разложить карточки на несколько групп так, чтобы в каждой группе сумма чисел на карточках была равна 9. При этом некоторые карточки, возможно, не будут использованы. Какое наибольшее количество групп карточек может получиться у школьника?
4. Можно ли покрасить каждое натуральное число в один из трех цветов (синий, желтый и красный) так, чтобы все цвета были использованы и для любых двух чисел разного цвета их сумма была третьего цвета (отличного от цветов, в которые покрашены сами числа)?
5. Две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 , соответственно, пересекаются в двух точках A и B , причем угол $\angle O_1AO_2$ тупой. Прямая O_2B вторично пересекает ω_1 в точке D , а прямая O_1B вторично пересекает ω_2 в точке C . Докажите, что B — центр вписанной в треугольник ACD окружности.
6. Натуральные числа m и n таковы, что если к десятичной записи числа m приписать справа десятичную запись числа n , то получится десятичная запись числа $(m + n)^2$. Докажите, что если n делится на m , то $\frac{n}{m} = 6$.