Областная олимпиада по математике, 2013 год, 9 класс

1. Числа $1, 2, \dots, 9$ расставили по кругу в каком-то порядке. Докажите, что найдутся три подряд стоящих числа с суммой не менее 16.

2. Пусть $x \geq y \geq z > 0$. Докажите, что $(x - y + z)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 1$.

3. Найдите все целые числа, представимые в виде $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, где a, b, c — натуральные числа.

4. а) Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, таких, что каждое их числе n, $n+1$, $n+2$ представляется в виде суммы двух квадратов целых чисел. б) Останется ли верным утверждение, если вместо 3 чисел рассматривать четыре числа $n-1$, n, $n+1$, $n+2$?

5. Сколькими способами множество, содержащее 12 элементов, можно разбить на 6 множеств, каждое из которых содержит по 2 элемента?

6. Внутри остроугольного треугольника ABC взята точка P так, что $\angle PAC = \angle PBC$. Пусть L и N — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны BC и AC, соответственно, D — середина AB. Докажите, что $DL = DN$.