Областная олимпиада по математике, 2013 год, 11 класс

1. В треугольнике ABC три чевианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке P внутри треугольника. Обозначим через S_a, S_b, S_c площади треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 соответственно. Докажите, что площадь треугольника $A_1B_1C_1$ является корнем уравнения

$$x^3 + (S_a + S_b + S_c)x^2 - 4S_aS_bS_c = 0.$$

2. Докажите, что ни при каком натуральном n число $(1^4 + 1^2 + 1)(2^4 + 2^2 + 1) \dots (n^4 + n^2 + 1)$ не является полным квадратом.

3. Решите систему уравнений $\sqrt{x} - \frac{1}{y} = \sqrt{y} - \frac{1}{z} = \sqrt{z} - \frac{1}{x} = \frac{7}{4}$ в вещественных числах.

4. Для каких вещественных c существует прямая, пересекающая кривую $y = x^4 + 9x^3 + cx^2 + 9x + 4$ в четырех различных точках?

5. В остроугольном треугольнике ABC точки D, E, F — основания высот, опущенных из точек A, B, C соответственно, H — точка пересечения высот. Докажите, что $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 2$.

6. В шкатулке n монет достоинством в натуральное число дукатов каждая на сумму $2n - 1$ дукатов. Докажите, что любую сумму от 1 до $2n - 1$ дукатов можно предоставить монетами из шкатулки.