

# Областная олимпиада по математике, 2013 год, 10 класс

1. Найдите все пятерки простых чисел  $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$ , для которых число  $q_1^4 + q_2^4 + q_3^4 + q_4^4 + q_5^4$  равно произведению двух последовательных четных натуральных чисел.
2. Пусть  $X$  — точка на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ . Прямая, параллельная  $AB$  и проходящая через  $X$ , пересекает  $CA$  в точке  $V$ , а прямая, параллельная  $AC$  и проходящая через  $X$ , пересекает  $AB$  в точке  $W$ . Прямые  $BV$  и  $XW$  пересекаются в точке  $D$ , а прямые  $CW$  и  $XV$  пересекаются в точке  $E$ . Докажите, что  $1/DE = 1/BX + 1/CX$ .
3. Решите систему уравнений  $\sqrt{x} - \frac{1}{y} = \sqrt{y} - \frac{1}{z} = \sqrt{z} - \frac{1}{x} = \frac{7}{4}$  в вещественных числах.
4. Мышка грызет куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к другому кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика?
5. Последовательность вещественных чисел  $u_1, u_2, \dots$  удовлетворяет условиям  $u_1 = 1$  и  $u_n = \frac{1}{u_1 + \dots + u_{n-1}}$  при  $n > 1$ . Докажите, что существует такое натуральное  $N$ , что  $u_1 + u_2 + \dots + u_N > 2013$ .
6. В выпуклом пятиугольнике  $ABCDE$   $AB = BC$  и  $\angle BCD = \angle EAB = 90^\circ$ . Внутри пятиугольника взята такая точка  $X$ , что  $AX \perp BE$  и  $CX \perp BD$ . Докажите, что  $BX \perp DE$ .