

Областная олимпиада по математике, 2012 год, 9 класс

1. Найдите все вещественные решения уравнения $(x + y)^2 = (x + 1)(y - 1)$.
2. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC . Пусть M — середина катета AB . Прямая, проходящая через A перпендикулярно CM , пересекает гипотенузу BC в точке P . Докажите, что $\angle AMC = \angle BMP$.
3. Вычислите значение выражения: $(1 + \operatorname{tg}1^\circ)(1 + \operatorname{tg}2^\circ) \dots (1 + \operatorname{tg}44^\circ)$.
4. На каждой стороне прямоугольника со сторонами 3 и 4 выбрано по одной точке. Выбранные точки соединили таким образом, что получился выпуклый четырехугольник со сторонами x, y, z, u . Докажите, что
$$25 \leq x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leq 50.$$
5. Найдите количество положительных целых чисел n , одновременно удовлетворяющих следующим условиям: а) десятичная запись числа n содержит не более 10 цифр; б) n не делится на 10.
6. Докажите, что если рациональные числа a и b удовлетворяют соотношению $a^5 + b^5 = 2a^2b^2$, то число $1 - ab$ является квадратом рационального числа.