Областная олимпиада по математике, 2012 год, 11 класс

1. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ обозначает множество действительных чисел, удовлетворяет при всех действительных x условию

$$f(f(x)) = x^2 f(x) - x + 1.$$

Найдите $f(1)$.

2. На каждой стороне треугольника выбрано по $p - 1$ точек, делящих сторону на p равных частей. Все точки деления соединены отрезками с противолежащими вершинами треугольника. На какое наименьшее число частей разбивается треугольник этими отрезками, если известно, что p — простое число?

3. Полное замощение прямоугольника $2m \times n$ с помощью mn прямоугольных плиток 2×1 называется *трансверсальным*, если найдется прямая, делящая прямоугольник на две непустые части и не проходящая через внутренние точки плиток. а) Докажите, что любое замощение прямоугольника 6×6 с помощью 18 плиток является трансверсальным. б) Найдется ли не трансверсальное замощение прямоугольника 8×8 с помощью 32 плиток?

4. Докажите, что если многочлен $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ с вещественными коэффициентами разлагается в произведение линейных двучленов с вещественными коэффициентами, то выполняется неравенство

$$(n-1)a_1^2 \geq 2na_0a_2.$$

5. В непрямоугольном треугольнике ABC выполняется соотношение

$$\mathrm{tg}A \cdot \mathrm{tg}B \cdot \mathrm{tg}C = [\mathrm{tg}A] + [\mathrm{tg}B] + [\mathrm{tg}C].$$

Найдите величину наименьшего угла треугольника. Здесь $[x]$ — целая часть числа x, то есть наименьшее целое, не превосходящее x.

6. Пусть n — натуральное число, $n < 11$. Простые числа p_1, p_2, p_3, p таковы, что $p_1 + p_3^n$ — простое, $p_1 + p_2 = 3p$, $p_2 + p_3 = p_1^n(p_1 + p_3)$ и $p_2 > 9$. Найдите значение выражения $p_1(p_2p_3^n + p_1^{p_1} + n)$.