

Областная олимпиада по математике, 2012 год, 10 класс

1. Положительные вещественные числа a, b, c удовлетворяют тождеству $a + b + c = 1$. Для них докажите неравенство

$$\frac{ab}{1+c} + \frac{bc}{1+a} + \frac{ca}{1+b} \leq \frac{1}{4}.$$

2. Докажите, что если в треугольнике ABC выполняется соотношение $\frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} = 2$, то он — прямоугольный.

3. Полное замощение прямоугольника $2m \times n$ с помощью mn прямоугольных плиток 2×1 называется *трансверсальным*, если найдется прямая, делящая прямоугольник на две непустые части и не проходящая через внутренние точки плиток. а) Докажите, что любое замощение прямоугольника 6×6 с помощью 18 плиток является трансверсальным. б) Найдется ли не трансверсальное замощение прямоугольника 6×7 с помощью 21 плитки?

4. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E , соответственно. Прямые BE и CD пересекаются в точке F . Докажите, что если $BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA$, то точки A, D, F и E лежат на одной окружности.

5. Найдите все вещественные решения системы уравнений:
$$\begin{cases} 2 \sin x + 3 \cos y = 3, \\ 3 \sin y + 2 \cos x = 4. \end{cases}$$

6. Найдите наибольшее натуральное число n , обладающее тем свойством, что оно делится на все натуральные числа, не превосходящие $\sqrt[3]{n}$.