Областная олимпиада по математике, 2011 год, 9 класс

1. Каждая точка плоскости покрашена в один из трех цветов — синий, красный или зеленый. Верно ли, что обязательно найдется отрезок длины 1, концы которого покрашены одним цветом?

2. Докажите, что для натуральных чисел a и b справедливо неравенство $a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geq 2ab$, где (a, b) — наибольший общий делитель, а $[a, b]$ — наименьшее общее кратное чисел a и b.

3. Внутри треугольника ABC выбрана точка P. AP пересекает BC в точке A', BP пересекает CA в точке B', CP пересекает AB в точке C'. Известно, что $\frac{AP}{PA'} + \frac{BP}{PB'} + \frac{CP}{PC'} = 2011$. Какие значения может принимать величина $\frac{AP}{PA'} \cdot \frac{BP}{PB'} \cdot \frac{CP}{PC'}$?

4. Пусть a, b, c — фиксированные действительные числа, причем $0 \leq a, b, c \leq 4$. Докажите, что у системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p^2 - aq & = & -3, \\ q^2 - br & = & -4, \\ r^2 - cp & = & -5, \end{array} \right.$$

нет ни одного решения (p, q, r) в действительных числах.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD, M и N — соответственно середины сторон AB и AC. Докажите, что величина угла MDN не меньше величины угла BAC.

6. У кассирши в одной пачке 200 денежных купюр. Она должна все купюры в пачке перевернуть лицевой стороной вверх; причем порядок купюр в пачке не имеет значения. На каждом шагу она выбирает некоторое количество купюр, лежащих в пачке подряд, и переворачивает всю выбранную часть пачки. Найдите наименьшее возможное число шагов, которого достаточно при любом изначальном положении купюр, чтобы перевернуть все имеющиеся в пачке купюры лицевой стороной вверх.