Областная олимпиада по математике, 2011 год, 11 класс

1. Пусть ABC — треугольник с целочисленными длинами сторон. Биссектриса, проведенная из вершины B, и высота, опущенная из вершины C, пересекаются внутри треугольника в точке P. Докажите, что отношение площадей треугольников APB и APC — рациональное число.

2. Пусть p — простое число. Найдите количество всех упорядоченных троек (a, b, c), удовлетворяющих двум условиям: i) числа a, b, c принадлежат множеству $\{1, 2, \dots, 2p^2\}$; ii) $\dfrac{[a,c]+[b,c]}{a+b} = c \cdot \dfrac{p^2+1}{p^2+2}$, где $[x, y]$ обозначает наименьшее общее кратное чисел x и y.

3. Пусть $A = 1 - 2^{-2011}$. Докажите, что $A + A^2 + A^4 + \dots + A^{2^{1000000000}} < 2012$.

4. У кассирши в одной пачке 200 денежных купюр. Она должна все купюры в пачке перевернуть лицевой стороной вверх, причем порядок купюр в пачке не имеет значения. На каждом шагу она выбирает некоторое количество купюр, лежащих в пачке подряд, и переворачивает всю выбранную часть пачки. Найдите наименьшее возможное число шагов, которого достаточно при любом изначальном положении купюр, чтобы перевернуть все имеющиеся в пачке купюры лицевой стороной вверх.

5. Найдите все строго возрастающие функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для любых вещественных x и y, $x \neq y$, выполняется соотношение

$$\frac{2\left(f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)}{f(x) - f(y)} = \frac{f(x) - f(y)}{2\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x)\right)}.$$

Здесь $\mathbb{R}$ обозначает множество вещественных чисел.

6. В треугольнике углы α, β, γ противолежат сторонам a, b, c соответственно. Докажите неравенство

$$a\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) + b\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}\right) + c\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geqslant 2\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right).$$