

Областная олимпиада по математике, 2011 год, 10 класс

1. вещественные числа a_1, a_2, \dots, a_{20} таковы, что

$$|a_1 - a_2| = 2|a_2 - a_3| = \dots = 19|a_{19} - a_{20}| = 20|a_{20} - a_1|.$$

Докажите, что $a_1 = a_2 = \dots = a_{20}$.

2. Назовем точку на декартовой прямоугольной координатной плоскости узлом сетки, если обе ее координаты — целые числа. Существует ли такой круг на этой плоскости, строго внутри которого расположено ровно 2011 узлов сетки?

3. а) В треугольнике ABC угол C — острый. Докажите неравенство:

$$(BC^2 + AC^2) \cdot \cos(\angle A - \angle B) \leq 2 \cdot BC \cdot AC.$$

б) Найдется ли треугольник ABC , для которого это неравенство не выполняется?

4. В группе из 42 человек каждый знаком, по крайней мере, с 36 людьми из группы. Докажите, что в этой группе найдется компания из 7 человек, в которой все знают друг друга.

5. Для каждого натурального $n \geq 2$ найдите все вещественные решения системы:

$$\begin{cases} x_1|x_1| = x_2|x_2| + (x_1 - 1)|x_1 - 1|, \\ x_2|x_2| = x_3|x_3| + (x_2 - 1)|x_2 - 1|, \\ \dots \\ x_n|x_n| = x_1|x_1| + (x_n - 1)|x_n - 1|. \end{cases}$$

6. Назовем положительное целое число k *чистым*, если оно не содержится ни в какой последовательности целых чисел c_0, c_1, c_2, \dots , где $0 < c_0 < k$ и при каждом $i > 0$ выполняется соотношение

$$c_i = \begin{cases} c_{i-1}/2, & \text{если } c_{i-1} \text{ четно,} \\ 3c_{i-1} - 1, & \text{если } c_{i-1} \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Например, число 10 не является чистым, так как оно содержится в последовательности 5, 14, 7, 20, 10, удовлетворяющей этим условиям. а) Является ли каждое делящееся на 3 положительное целое число чистым? б)

Докажите, что если целое число $k > 1$ простое, но не делится на 3, то число $k + 1$ делится на 6.