Областная олимпиада по математике, 2010 год, 9 класс

1. Пусть точка O — центр квадрата $ABCD$, а точка E симметрична O относительно точки C. Через P обозначим точку пересечения описанной окружности треугольника BDE и отрезка AO. Докажите, что P является серединой отрезка AO.

2. Найдите все целые числа m, n удовлетворяющие уравнению $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

3. Пусть a, b, c — неотрицательные, а x, y, z — положительные действительные числа такие, что $a+b+c = x+y+z$. Докажите неравенство:
$$\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} + \frac{c^3}{z^2} \geq a+b+c.$$

4. Для треугольника ABC с углами $\angle A = 2\angle B$ докажите равенство $a^2 = b(b+c)$, где a, b, c — длины сторон BC, CA, AB соответственно.

5. Вычислите значение выражения
$$\left[\sqrt{2010^2+1} + \sqrt{2010^2+2} + \cdots + \sqrt{2010^2+4020}\right],$$
где $[x]$ обозначает целую часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

6. Имеется 100 шашек с разноцветными сторонами: одна сторона каждой шашки имеет синий цвет, а другая — красный (как для игры в реверси). Любое расположение этих шашек по одному на вершинах правильного 100-угольника назовем *конфигурацией*. За один ход разрешается переворачивать три рядом стоящие шашки. Сколько различных конфигураций шашек можно получить из фиксированной начальной применением конечного числа ходов (две конфигурации считаются различными, если они отличаются цветом шашки хотя бы в одной вершине)?