Областная олимпиада по математике, 2010 год, 11 класс

1. Для целых неотрицательных чисел $a < b$ обозначим через $M(a, b)$ арифметическое среднее множества чисел $\sqrt{i^2 + 3i + 3}$, $a \le i \le b$, т. е. $M(a,b) = \frac{\sum_{i=a}^{b} \sqrt{i^2+3i+3}}{b-a+1}$. Вычислите значение $[M(a, b)]$ (как функцию от a и b), т. е. наибольшее целое число, не превосходящее $M(a, b)$.

2. Подмножество A множества чисел $\{1, 2, \ldots, 2010\}$ обладает следующим свойством: разность любых двух чисел из A не является простым числом. Самое большее, сколько элементов может иметь подмножество A?

3. Пусть точка I — центр окружности ω, вписанной в трапецию $ABCD$. Стороны AD и BC трапеции пересекаются в точке R. Пусть P и Q — точки касания окружности ω со сторонами AB и CD, соответственно. Пусть прямая, проходящая через точку P и перпендикулярная PR, пересекает прямые AI и BI соответственно в точках A_0 и B_0, а прямая, проходящая через точку Q и перпендикулярная QR, пересекает прямые CI и DI соответственно в точках C_0 и D_0 . Докажите, что $A_0D_0 = B_0C_0$.

4. Найдите все функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющие тождеству: $(1 + y \cdot f(x))\,(1 - y \cdot f(x + y)) = 1$, для любых $x, y \in \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+$ — множество всех положительных действительных чисел.

5. Имеется n шашек $(n > 2)$ с разноцветными сторонами: одна сторона каждой шашки имеет синий цвет, а другая — красный (как для игры в реверси). Любое расположение этих шашек по одному на вершинах правильного n-угольника назовем *конфигурацией*. За один ход разрешается переворачивать три рядом стоящие шашки. Сколько различных конфигураций шашек можно получить из фиксированной начальной применением конечного числа ходов (две конфигурации считаются различными, если они отличаются цветом шашки хотя бы в одной вершине)?

6. Докажите, что для любого натурального числа k существует натуральное число n, имеющее ровно k различных простых делителей, и такое, что $2^{n^2} + 1$ делится нацело на n^3.