Областная олимпиада по математике, 2010 год, 10 класс

1. Определите все натуральные числа n, удовлетворяющие условию: n имеет ровно четыре различных натуральных делителя, сумма которых равна 108.

2. Пусть a, b, c — положительные действительные числа такие, что $a+b+c=1$. Докажите неравенство

$$(ax_1^2+bx_1+c)(ax_2^2+bx_2+c)\dots(ax_n^2+bx_n+c)\geq 1$$

для любых положительных действительных чисел $x_1,x_2,\dots,x_n$, удовлетворяющих условию $x_1x_2\dots x_n=1$.

3. Пусть точка I — центр окружности ω, вписанной в трапецию $ABCD$. Стороны AD и BC трапеции пересекаются в точке R. Пусть P и Q — точки касания окружности ω со сторонами AB и CD, соответственно. Пусть прямая, проходящая через точку P и перпендикулярная PR, пересекает прямые AI и BI соответственно в точках A_0 и B_0, а прямая, проходящая через точку Q и перпендикулярная QR, пересекает прямые CI и DI соответственно в точках C_0 и D_0 . Докажите, что $A_0D_0=B_0C_0$.

4. Вычислите значение выражения $[\sqrt{2010^2+1}+\sqrt{2010^2+2}+\dots+\sqrt{2010^2+4020}]$, где $[x]$ обозначает целую часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

5. Пусть точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, а точки A_0, B_0 и C_0 — центры окружностей, описанных около треугольников BCO, ACO и ABO, соответственно. Докажите, что прямые AA_0 , BB_0 и CC_0 пересекаются в одной точке.

6. Имеется n шашек $(n>2)$ с разноцветными сторонами: одна сторона каждой шашки имеет синий цвет, а другая — красный (как для игры в реверси). Любое расположение этих шашек по одному на вершинах правильного n-угольника назовем *конфигурацией*. За один ход разрешается переворачивать три рядом стоящие шашки. Сколько различных конфигураций шашек можно получить из фиксированной начальной применением конечного числа ходов (две конфигурации считаются различными, если они отличаются цветом шашки хотя бы в одной вершине)?