Областная олимпиада по математике, 2009 год, 9 класс

1. Дан остроугольный треугольник ABC с центром описанной окружности в точке O. Обозначим через K основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CO. Пусть перпендикуляр, опущенный из точки K на прямую BC пересекает прямую AB в точке N. Докажите, что прямые CN и AB перпендикулярны.

2. Дан квадрат $n \times n$, раскрашенный в шахматном порядке так, что левая верхняя угловая клетка черная. Над квадратом разрешается совершать следующую операцию: выбрать прямоугольник размером 3×2 или 2×3, в котором ровно три белые клетки, и перекрасить их в черный цвет. При каких натуральных значениях n при помощи таких операций можно перекрасить все клетки в черный цвет?

3. Определите все иррациональные числа x такие, что оба числа $x^2 + 2x$ и $x^3 - 6x$ — рациональные.

4. Определите все натуральные числа n, для которых выполнено равенство $[n\sqrt{2}] = \left[\dfrac{3n}{2}\right]$. (Здесь $[x]$ — целая часть числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее действительного числа x)

5. В треугольнике ABC $(AB < BC)$ точка I — центр вписанной окружности, M — середина стороны AC, N — середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.

6. В школе учатся 2009 мальчиков и 2009 девочек. Каждый школьник посещает не более 100 кружков. Известно, что любой мальчик посещает с каждой девочкой по крайней мере один общий кружок. Докажите, что существует кружок, который посещают по крайней мере 11 мальчиков и 11 девочек.