Областная олимпиада по математике, 2009 год, 11 класс

1. Определите все натуральные числа $n = p_1 p_2 \dots p_k$, которые являются делителем числа $(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_k+1)$, где $p_1 p_2 \dots p_k$ — разложение числа n на простые множители (не обязательно различные).

2. Обозначим центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, CA и AB треугольника ABC, через I_a, I_b и I_c соответственно. Пусть BM и BN — биссектрисы треугольников I_aBC и I_cBA соответственно. Обозначим через K точку касания вневписанной окружности со стороной AC. Докажите, что середина MN равноудалена от B и K.

3. Определите все функции $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такие, что для любых положительных действительных чисел x, y выполнено равенство

$$(x+y)f(f(x)y) = x^2 f(f(x) + f(y)).$$

4. Дан треугольник ABC, вписанная окружность которого касается сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Пусть прямые AA_1 и CC_1 пересекаются в точке K. Проведем через точку K прямую параллельную стороне AC, которая пересекает прямые A_1B_1 и C_1B_1 в точках M и N соответственно. Докажите, что $MK = KN$.

5. Докажите, что для любого натурального числа m, имеющего делитель n, существует простое число p такое, что $m^n - 1$ делится на p, а число $m - 1$ не делится на p.

6. Два фокусника показывают трюк. Первый фокусник выходит из комнаты, а затем второй фокусник берёт колоду из 100 карт, пронумерованных числами от 1 до 100, и просит каждого из трех участников выбрать по очереди по одной карте, и при этом он видит какую карту взял каждый. Затем он сам добавляет еще одну карту к трем выбранным из оставшейся колоды. Участники вызывают первого фокусника, предварительно перемешав 4 карты произвольным образом, и дают ему их. Первый фокусник смотрит на эти 4 карты и «угадывает» какую карту выбирал каждый из участников. Докажите, что фокусники смогут исполнить этот трюк.