Областная олимпиада по математике, 2009 год, 10 класс

1. Пусть \lbracea$_n\}_{n\geq 1}$ — последовательность действительных чисел такая, что $|a_{n+1} - a_n| \leq 1$ для всех натуральных чисел n, а \lbraceb$_n\}_{n\geq 1}$ — последовательность действительных чисел такая, что $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$. Докажите, что $|b_{n+1} - b_n| \leq \frac{1}{2}$ для всех натуральных n.

2. В треугольнике ABC вписанная окружность с центром I касается сторон AB, BC и CA в точках M, N и K соответственно. Обозначим через E – точку пересечения прямых MN и AC. Докажите, что прямая IE перпендикулярна прямой BK.

3. Существует ли непостоянная бесконечная арифметическая прогрессия, каждый член которой можно записать в виде a^b, где a, b натуральные числа и $b \geq 2$?

4. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 к сторонам BC, AC, AB соответственно. На высотах AA_1, BB_1, CC_1 выбраны точки D, E, F так, что $\frac{AD}{AA_1} = \frac{BE}{BB_1} = \frac{CF}{CC_1} = k$. Определите все значения k, для которых треугольник ABC подобен треугольнику DEF.

5. Определите все положительные числа x, y, z для которых одновременно выполняются три неравенства: $x^3y + 3 \leq 4z$, $y^3z + 3 \leq 4x$, $z^3x + 3 \leq 4y$.

6. В школе учатся 2009 мальчиков и 2009 девочек. Каждый школьник посещает не более 100 кружков. Известно, что любой мальчик посещает с каждой девочкой по крайней мере один общий кружок. Докажите, что существует кружок, который посещают по крайней мере 11 мальчиков и по крайней мере 11 девочек.